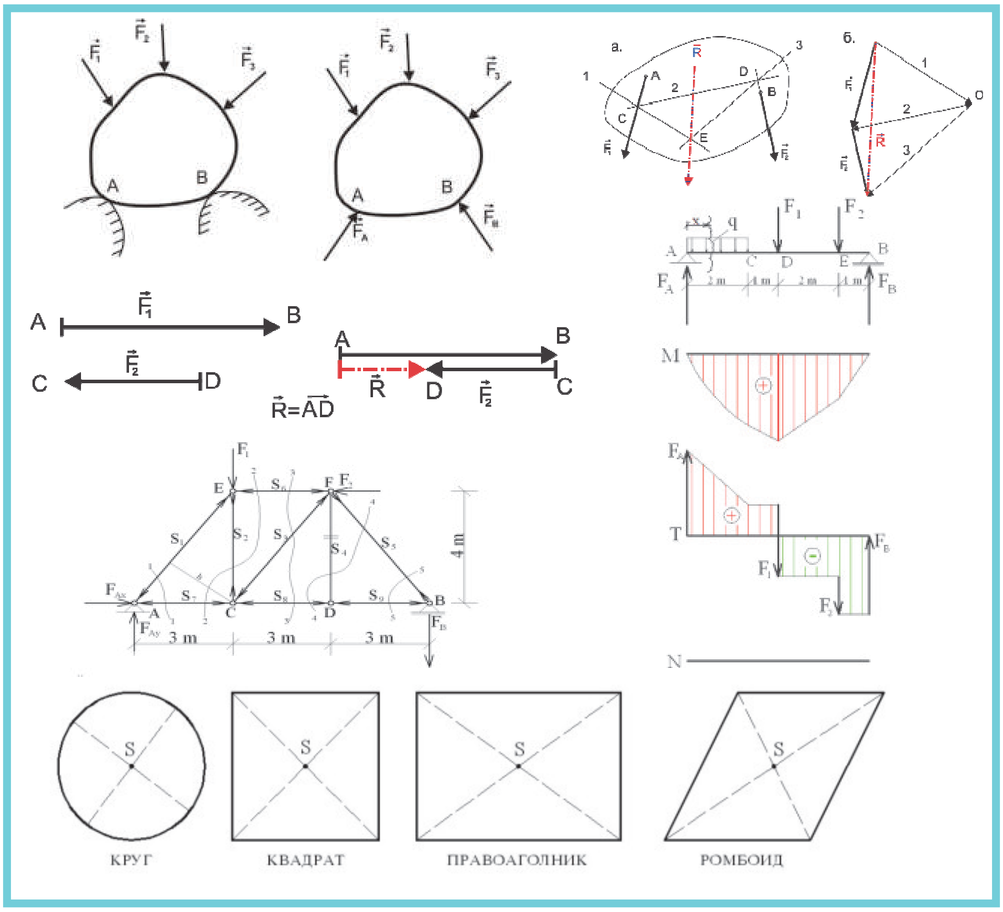
Јела Дугалиќ
Урим Мејзини
Бела Дулиќ



ТЕХНИЧКА МЕХАНИКА
ЗА II ГОДИНА

Градежно геодетска струка

Градежен техничар

Автори: ЈЕЛА ДУГАЛИЌ, дипл. град. инж.

УРИМ МЕЈЗИНИ, дипл. град. инж.

БЕЛА ДУЛИЌ, дип.град.инж

Рецензенти:

Проф. д-р Мери Цветковска Градежен факултет - Скопје

Наташа Христовска, дипл. град. инж.

Лида Трајковска, дипл. град. инж.

Лектура: Билјана Богданоска

Компјутерска обработка: Јела Дугалиќ и Урим Мејзини

Техничко уредување: Јела Дугалиќ и Урим Мејзини

Уредник: Авторите

Издавач: Министерство за образование и наука за Република Македонија

Печати: Графички центар дооел, Скопје

Со Одлука за одобрување на учебник по предметот Техничка механика за втора година, Струка;градежно геодетска ; профил; градежен техничар бр.22-1260/1 од 13.07.2011 донесена од Национална комисија за учебници.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св.Климент Охридски,, , Скопје
531.8(075.3)

ДУГАЛИЌ, Јела
Техничка механика за II година : градежно геодетска струка : градежен техничар / Јела Дугалиќ, Урим Мејзини, Бела Дулиќ. - Скопје : Министерство за образование и наука на Република Македонија, 2011. - 144стр.: илустр. ; 28 см

ISBN 978-608-226-323-6
1. Мејзини, Урим(автор) 2. Дулиќ, Бела (автор)
COBISS.MK-ID 89144074

ПРЕДГОВОР

Овој учебник го содржи материјалот од предметот ТЕХНИЧКА МЕХАНИКА што е предвиден со наставната програма за средно образование од градежно – геодетска струка, за образовен профил градежен техничар.

За полесно совладување на оваа научна дисциплина, во секоја тематска целина, по деталното теоретско објаснување на предвидената материја, дадени се нумерички примери, решени аналитички и графички. Некои примери се решени само аналитички, согласно наставната програма.

Учениците, успешното совладување на предвидената материја можат да го проверат преку задачите за вежбање, прашањата за само оценување и дадените тестови.

Теоретските излагања се дадени на нивото на знаење на учениците по математиката (средношколско ниво). Нумеричките примери се пресметани со помош на дигитрон, со кој работат и учениците.

Решавајќи ги задачите по две методи (каде е предвидено со програмата), аналитички и графички метод, кога резултатите се идентични, учениците чуствуваат задоволство.

Предвидениот фонд на часови за совладување на оваа материја е сосема доволен.

Авторите

СОДРЖИНА

Тема 6 – Видиви носачи

Тема 7 – Решеткасти носачи

В О В Е Д

Класичната механика е научна дисциплина која ги проучува наједноставните видови движења и мирувања на материјата ,односно материјалните тела, како и причините (силите) поради кои настануваат таквите состојби. Тие движења и мирувања може да се изучуваат по чист теоретски пат, со математички средства. Тоа спаѓа во теоретската или рационалната механика. Со воведување на одредени претпоставки може да се упрости сложениот математички пат, а притоа добиените резултати во примена да задоволуваат.

Механиката што ги применува теоремите и законите на рационалната механика, но притоа воведува одредени упростувања применливи во техниката, се нарекува техничка механика (грчки: $\mu\eta\chi\alpha\upsilon\iota\chi\eta\ \tau\varepsilon\chi\upsilon\eta$ се чита: механики техни).

Поделба на механиката

Според својствата на самите тела, техничката механика се дели на:

- ***механика на цврсти тела;***
- ***механика на течни тела (хидромеханика);***
- ***механика на гасовни тела (аеромеханика***).

Механиката на цврстите тела, која има најголема примена во техниката се дели на:

- ***механика на крути тела;***
- ***механика на еластични цврсти тела***, **која уште се нарекува и *јакост на материјалите.***

Механиката на крути тела, при која обликот на телото се зема како непроменлив,недеформабилен.

Механиката на крутите тела понатаму се дели на: ***статика, кинематика*** и ***динамика***.

Во статиката се изучуваат условите под кои материјалното тело, материјалната точка, нападната од надворешни сили, останува во рамнотежа т.е. мирување. Тоа значи дека во статиката се работи само со поими ***простор*** и ***сила.***

Кинематиката го изучува движењето на материјалните тела или материјалните точки, не водејќи сметка за причините кои го предизвикуваат тоа движење. Движењето се набљудува во одредени дадени геометриски услови во зависност од времетраењето. Тоа значи, дека во кинематиката се работи само со поими ***простор*** и ***време***.

Во динамиката се изучува движењето на материјалните тела земајќи ги предвид и причините кои ги предизвикуваат тие движења. Тоа значи, дека во динамиката се работи со поимите: ***простор, време, сила*** и ***маса.***

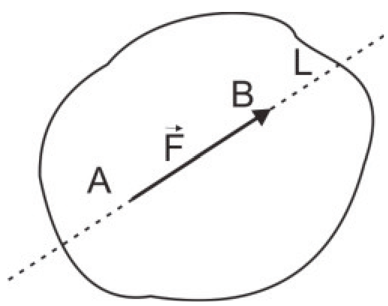
Во науката за јакост на материјалите се изучуваат соодносите кои постојат помеѓу ***силите, облиците*** и ***димензиите*** на конструктивните елементи, воведувајќи го поимот за видови на **материјали**, ***деформации*** и ***напрегања.***
Во овој учебник ќе се запознаеме само со дел од механиката на цврсти тела и тоа со статиката.

Поим за сили

Силата е причина за промена на мирувањето, односно на движењето на едно тело. Ја обележуваме со **F (лат. FORTITUDO – сила**). Во механиката силите може да предизвикуваат ***промени*** во движењето или мирувањето. Силите кои настојуваат да предизвикаат движење ги викаме ***активни*** **сили (акции**), а силите кои се спротиставуваат на движењето се ***реакции*** или ***пасивни*** сили. Разликуваме **надворешни** и **внатрешни сили**.

Надворешните сили дејствуваат на материјалното тело однадвор, а внатрешните сили се јавуваат во него. За разлика од ***скаларните*** **г**олемини кои се определени само со еден мерен број (***должина, време, температура***), силата е ***векторска големина*** за чија комплетна дефинираност освен ***бројната вредност*** (***интензитет***) е потребно да се знае уште ***насоката, правецот*** и ***нападнатата точка***.

Графички силата се претставува со насочена отсечка (сл.1). Должината АВ во одреден размер претставува големина (интензитет) на силата $\vec{F}$. Точката *A* е нападната точка, стрелката означува насока, а правецот е означен со нападната линија *L*.



Сл.1

Надворешните сили може да бидат **концентрирани** (дејствуваат на мошне мали плоштини), **површински** (дејствуваат по плоштината) **и волуменски** (дејствуваат по целата маса на телото, на пример гравитационата сила).

Мерни единици

На XI Генерална конференција за мерки и тегови,одржана 1960 година во Париз,прифатен е како меѓународен систем на мерки, таканаречен *SI* (SYSTEM INTERNATIONAL) систем, кој е препорачан за употреба во сите подрачја на знаењата и техниката.

Кај нас е прифатен со Законот за мерните единици и мерилата објавен во Сл. лист на СФРЈ бр.13 од 2 април 1972 година. Во него се дефинирани основните величини и нивните мерни единици од кои може да се изведат сите други физички величини. Од **основните величини** во техничката механика (во статиката и јакост на материјалите) се користат само **должината** и **масата**.

Единицата за должина, метар (m) првпат била дефинирана 1791 година како четриесетмилионити дел од Земјиниот меридијан што поминува низ Париз. Врз основа на мерењата бил направен еталонот на метарот, т.н. „метар на архивот". Со подоцнежните поточни мерења на должината на меридијанот се покажало дека еталонот на метарот не е четриесетмилионити дел од меридијанот, па со тоа и оваа дефиниција на метарот била напуштена.

Единицата за маса, килограм, претставува масата на меѓународниот прототип за килограмот, направен од легура на платина и иридиум којшто е одобрен од Генералната конференција за мерки и тегови одржана во Париз 1889 год. и се чува во Севр кај Париз. Тој прототип има облик на цилиндар со висина (39 mm) еднаква на пречникот. Оваа маса е за 0,28 грамови поголема од масата на 1 dm^3 чиста дестилирана вода на + 4°C, како што во почетокот бил дефиниран килограмот. Значи, до денес не е најдена природна единица за маса, туку се служиме со договорениот прототип.

Од основните мерни единици со помош на алгебарски изрази и со употреба на математички симболи за множење и делење се образуваат **изведените** мерни единици. Во техничката механика се користат следниве изведни мерни единици:

- ***за плоштина - квадратен метар, со ознака*** m^2
- ***за зафатнина - кубен метар, со ознака*** m^3
- ***за сила-њутн, со ознака*** N.

Сила со интензитет 1 N е сила која на тело со маса 1 kg му соопштува забрзување од 1 m/s^2.

$$1N = 1kg \cdot 1\ m/s^2$$

- ***за притисок – паскал, со ознака*** Pa

Паскал е притисок што го предизвикува сила од еден њутн која рамномерно е распоредена и дејствува вертикално врз плоштина од еден квадратен метар.

$$1Pa = \frac{1N}{1m^2}$$

За мерење на големини кои се поголеми или помали од дефинираните единици ги употребуваме меѓународно усвоените префикси пред ознаките на мерните единици.

Назив на префиксот	Ознака на префиксот	Време на префиксот (со која се множи единицата)	
eksa	E	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
peta	P	1 000 000 000 000 000	10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga	G	1 000 000 000	10^{9}
mega	M	1 000 000	10^{6}
kilo	k	1 000	10^{3}
hekto	h	1 00	10^{2}
deka	da	1 0	10^{1}
deci	d	0,1	10^{-1}
centi	c	0,01	10^{-2}
mili	m	0,001	10^{-3}
mikro	μ	0, 000 001	10^{-6}
nano	η	0, 000 000 001	10^{-9}
piko	p	0,000 000 000 001	10^{-12}
femto	f	0,000 000 000 000 001	10^{-15}
ato	a	0,000 000 000 000 000 001	10^{-18}

Предвидени се и мерни единици т.н. **дополнителни мерни единици** кои што се надвор од SI, а може да се употребуваат:

- за агол во рамнина (α, β,γ,δ.....) - **радијан** (rad).

Радијан е агол во рамнина меѓу два радиуса кои на кружницата исекуваат лак со должина еднаква на радиусот.

Полн агол = $2\pi\ rad$

Освен радијан може да се користат уште и:

- еден степен 1º = $\frac{\pi}{180} rad = 60'$ (минута)

- минута (′) = $\frac{\pi}{10800} rad = 60''$ (секунда)

- секунда (″) = $\frac{\pi}{648000} rad$

  1 rad = 57º 17′ 44,8″

  1º = 0,0175 rad

- за температура целзиусов степен

$$1^{\circ}C = 1K$$

По големина степен на целзиус е еднаков на степен на келвин. Температурата од 0°C е еднаква на температура од 273,16 K. Забранета е употреба на ференхајт, ранкин и реомир.

Во техничката механика како ознаки често се користат грчките букви поради што е во целина даден гечкиот алфабет.

ГРЧКИ АЛФАБЕТ

Α α	Алфа	Ι ι	Јота	Ρ ρ	Ро
Β β	Бета	Κ κ	Капа	Σ σ	Сигма
Γ γ	Гама	Λ λ	Ламбда	Τ τ	Тау
Δ δ	Делта	Μ μ	Ми	Υ υ	Ипсилон
Ε ε	Епсилон	Ν ν	Ни	Φ φ	Фи
Ζ ζ	Зета	Ξ ξ	Кси	Χ χ	Хи
Η η	Ета	Ο ο	Омикрон	Ψ ψ	Пси
Θ θ	Тета	Π π	Пи	Ω ω	Омега

1. С Т А Т И К А

Името статика потекнува од грчкиот збор **στατιχη,** што значи ***стоење*** односно ***мирување*** (се чита: статика).

Статиката е дел од техничка механика која ги испитува условите под кои материјалната точка или материјалното тело под влијание на надворешните сили останува во рамнотежа, односно во мирување. Тоа е основната задача на статиката. Да се потсетиме на знаењата од физиката дека тоа е само релативен мир бидејќи апсолутното мирување во природата не постои.

Со термин **материјално тело,** како ограничен дел на материјата врз која се набљудуваат промените, веќе се сретнавме во уводниот дел.

Телото со занемарливо мали димензии во однос на можната траекторија на гвижење го викаме **материјална точка**. Таква точка нема волумен, ниту облик, туку само маса.

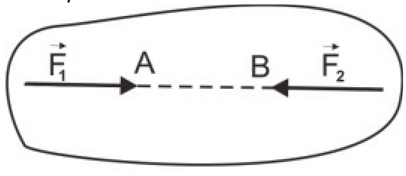
Силите во природата го деформираат телото врз кое дејствуваат, односно ја менуваат неговата форма и волумен. Тоа значи, дека цврстите тела се деформабилни. Но, во статиката предмет на изучување е идеално цврсто тело т.н. **круто тело**, кое што не се деформира.

Втората основна задача на статиката е дадениот систем на сили да го сведе на најпрост систем и да го замени со еквивалентен систем на сили. Кога на некоја точка или тело дејствуваат истовремено повеќе сили т.н. систем на сили кои не се во рамнотежа, нивното дејство може да се замени со една сила која е еквивалентна на тој систем сили. Таа сила се вика **резултанта.** Одделните сили кои ја даваат оваа резултанта се викаат **компоненти**. Ова е принцип на **еквиваленција.**

Аксиоми на статиката

Како секоја наука и статиката се заснова на одредени принципи (закони) кои имаат карактер на аксиноми. До нив е дојдено со набљудување на природните појави. Проверени се низ практиката и служат како основа за понатамошното проучување на статичките проблеми.

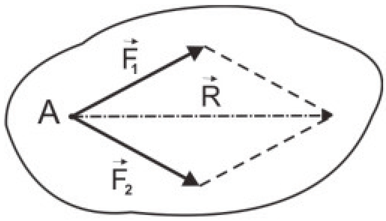
Прв аксиом. *Ако на слободно круто тело дејствуваат две сили, тие ќе бидат во рамнотежа, а телото во мирување, само тогаш, кога тие сили ќе имаат: еднаква големина, спротивна насока и ист правец (сл.* 2).



$\vec{F}_1=-\vec{F}_2$

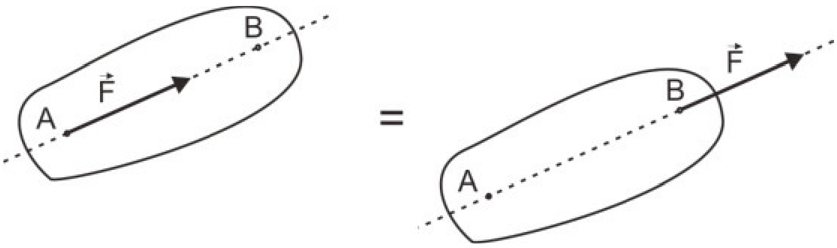
Сл. 2

Втор аксиом. *Дејството на две сили што напаѓаат круто тело во иста нападна точка, но се со различни правци, може еквивалентно да се замени со трета сила т.н. резултанта R. Големината и правецот на таа резултанта е определена со дијагоналната на паралелограмот конструиран над силите* $\overrightarrow{F1}$ *и* $\overrightarrow{F2}$ *како страни, а насоката оди од нападнатата точка кон спротивното теме на паралелограмот.* (*сл.* 3). **Овој аксином е познат како правило на паралелограм на силите.**



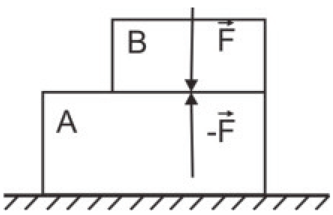
Сл. 3

Трет аксиом. *Нападната точка на силата што дејствува на едно круто тело може слободно да се поместува по должината на нејзината нападна линија, независно дали телото е во мирување или движење* (сл. 4).



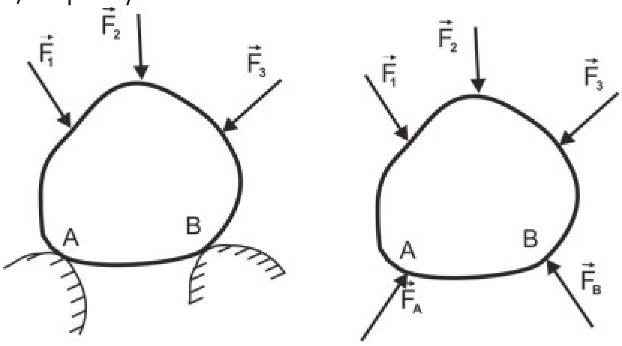
Сл. 4

Четврт аксиом. *Две тела дејствуваат едно на друго со сили кои имаат иста големина и правец, но се со спротивни насоки. Акцијата е еднаква и спротивна на реакцијата. (сл.* 5). **Овој аксином е познат како закон на акција и реакција.**



Сл. 5

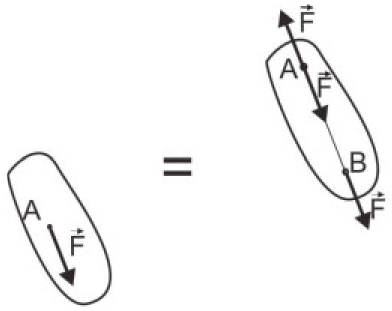
Петти аксиом. *Секое врзано (неслободно) круто тело може да се набљудува како слободно, ако постојаните врски кои го ограничуваат неговото слободно движење се заменат со сили кои се нарекуваат реакции. (сл* 6).



Сл. 6

При решавање на статистичките проблеми овие реакции или реактивни сили најчесто се јавуваат како непознати со својата големина, правец и насока, а со позната нападна точка.

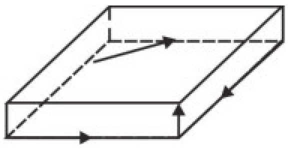
Шести аксиом. Дејството на даден систем од сили врз некое круто тело нема да биде изменето ако на овој систем од сили додадеме или одземеме некој друг систем од сили кој се наоѓа во рамнотежа (сл.7)



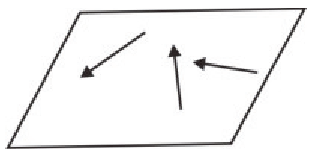
Сл. 7

Поделба и методи на работа во статиката

Според распоредот на силите во просторот, статиката се дели на статика во **простор** (сл. 8) и статика во **рамнина** (сл. 9). Ние ќе се запознаеме само со статиката во рамнина. Тоа значи дека сите сили кои дејствуваат на материјалната точка или материјалното тело, дејствуваат во една рамнина.



Сл. 8



Сл. 9

Сите задачи во статиката можеме да ги решиме **аналитички** и **графички.** По аналитички пат статичките непознати големини ги определуваме со помош на математичките операции. По графички пат статичките непознати големини ги определуваме со помош на цртање (графостатика). Во аналитичкиот метод резултатите се точни, додека во графичкиот метод се можни грешки во зависност од размерот кој се применува при решавањето на задачите.

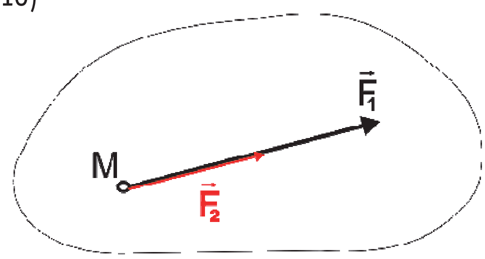
По пат на аналитички метод може да се изврши контрола на решената задача со графички метод и обратно. Во практика во одредени случаи за да се проверат добиените резултати, може да се користат и двете методи.

2. СТАТИКА НА МАТЕРИЈАЛНАТА ТОЧКА

Со терминот **материјална точка,** како тело со занемарливо мали димензии во однос на неговата траекторија кое нема волумен ниту облик, туку само маса, веќе се сретнавме во уводниот дел. На таквата точка може да дејствуваат една или повеќе сили. Во случај да дејствува само една сила, таа точка ќе се движи во правец и насока на силата. Кога пак на неа дејствуваат повеќе сили, таа може да се движи во правец и насока на резултантата од тие сили, но може да остане и во мирување, во случај кога силите се во рамнотежа.

2.1 СЛОЖУВАЊЕ НА СИЛИТЕ КОИ ДЕЈСТВУВААТ НА МАТЕРИЈАЛНА ТОЧКА ВО ИСТ ПРАВЕЦ

Силите кои дејствуваат по должина на една линија ги нарекуваме колинеарни сили. Најпрвин ќе набљудуваме случај кога на материјалната точка М дејствуваат две сили F_1 и F_2 во ист правец и во иста насока (сл. 10)

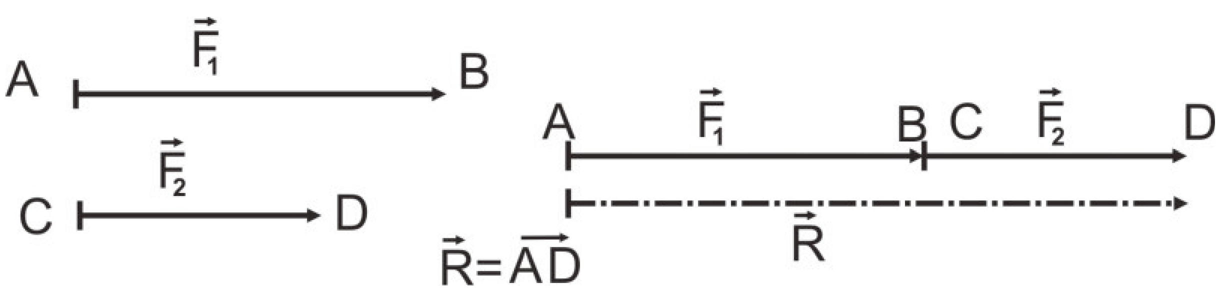


Сл.10

Нивното заедничко дејство може да се замени со друга сила која претставува резултанта. Оваа резултанта може да се определи аналитички и графички. Аналитички, резултантата се определува со равенката (1):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad (1)$$

Графички резултанта се определува со графичко претставување на силите во погоден размер и нивното собирање на иста права (сл. 11).



Сл.11

Овој принцип важи и кога имаме произволен број сили кои дејствуваат на една точка по должина на иста права и имаат иста насока.

Аналитичкиот израз за резултантата во тој случај е даден равенката(2а):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (2а)$$

Поради колинеарноста на силите $\vec{F}_i$ (дејствуваат по должина на иста права) векторскиот збир од рав.(2а) може да се замени со скаларен, односно интензитетот на резултантата да се добие како алгеборски збир од интензитетите на одделните сили рав.(2б)

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i \qquad (2б)$$

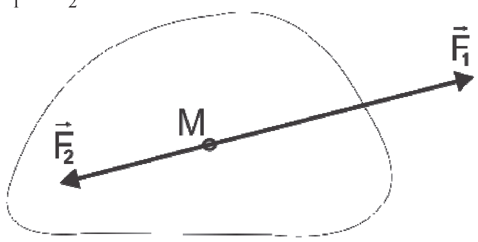
Симболот $\sum$ (сигма) претставува знак за збир.

Равенката (2) со зборови гласи:

Интензитетот на резултантата на силите кои напаѓаат материјална точка по должина на иста права и во иста насока е еднаков на аритметичкиот збир на интензитетите на дадените сили. Резултантата ја има нивната насока.

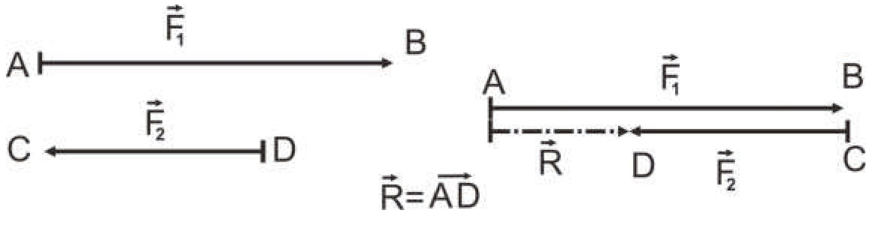
Кога на материјалната точка *M* дејствуваат две сили $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ по ист правец, но во спротивни насоки (сл.12), нивната резултанта е еднаква на нивната разлика и има насока на поголема сила.

$F_1 < F_2$ тогаш ќе биде: $R = F_1 + F_2$



Сл.12

Оваа резултанта исто така може да се определи и графички. Во погоден размер ги претставуваме силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и нивната разлика ја дава резултантата (сл. 13).



Сл. 13

Овој принцип се однесува и за произволен број на сили кои дејствуваат на материјалната точка по должина на иста права, но во различни насоки.

Аналитчки израз на резултантата е даден со равенката (3):

$$R = \pm F_1 \pm F_2 \pm .... \pm F_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_i \qquad (3)$$

Интензитетот на резултантата на систем од сили кои напаѓаат материјална точка, а се со ист правец, но со различни насоки, е еднаков на алгебарскиот збир на интензитетите на одделните сили.

Кога овој алгебарски збир е еднаков на нула, материјалната точка е во мирување. Тој услов за рамнотежа на сили се изразува со равенката (4):

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = 0 \qquad (4)$$

Постапката при определување на резултанта на сили се вика уште и сложување на сили.

Бидејќи силите се векторски големини, за нивното собирање важат комутативниот и асоцијативниот закон. Според комутативниот закон векторскиот збир на два вектори не зависи од редот на собирањето т.е. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$, додека од асоцијативниот закон произлегува дека векторскиот збир не се менува, ако собироците ги групираме на произволен начин.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3$$

Досегашното теоретско запознавање со статиката на материјална точка треба да го провериме преку нумерички примери.

РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

Пример 1. *Графички и аналитички да се определи резултантата на силите* F_1=6kN, F_2=8kN и F_3=3kN, *ако тие дејствуваат на материјалната точка по иста нападна линија и имаат иста насока.*

Решение

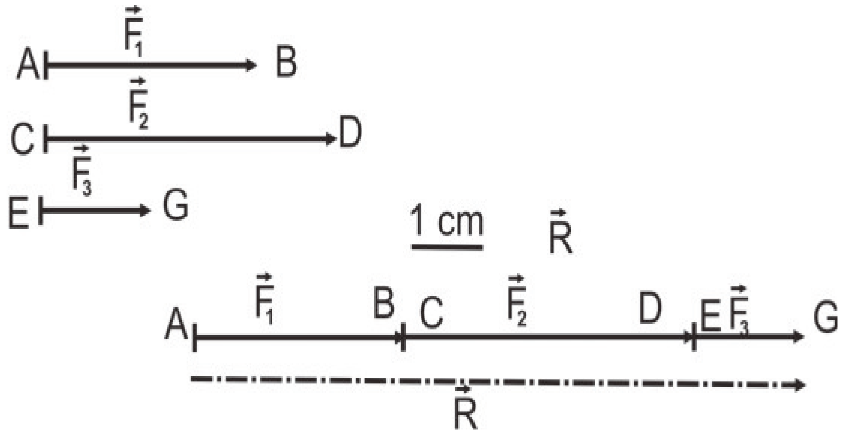
Аналитички: врз основа на равенката (2в) се добива:

$$R = \sum_{i=1}^{3} F_i = F_1 + F_2 + F_3 = 6 + 8 + 3 = 17kN$$

Очигледно е совпаѓањето на резултатите добиени по графички и аналитички метод.

Графички: (размер : 1см = 2kN, се чита: еден центиметар одговара на два килоњутна)

Од сл. 14, се добива: $R = 8,5 \times 2 = 17kN$



Сл. 14

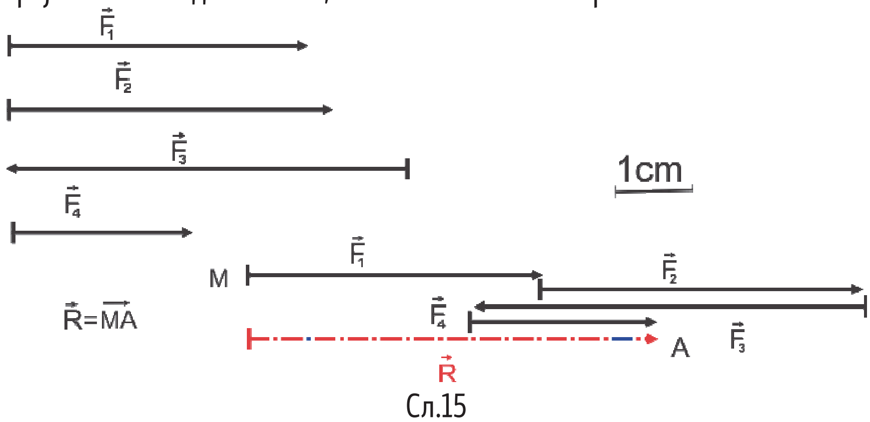
Пример 2: *Графички и аналитички да се определи резултантата на силите* F_1 =3,8 N; F_2 =4,2 N; F_3 = – 5,1N и F_4 =2,4N, *ако тие дејствуваат на материјалната точка по ист правец, но силата* $\vec{F}_3$ *е во обратна насока сл(15).*

Р е ш е н и е:

Графички: (размер : 1см = 1N) Од сл.15 се добива:

R = 5,3 x 1= 5,3 N

Резултантата R еднаква е на должината од нападнатата точка на првата сила, т.е. точката *M,* до крајот на последната сила, т.е. точката *A*. Ова правило е важно.



Сл.15

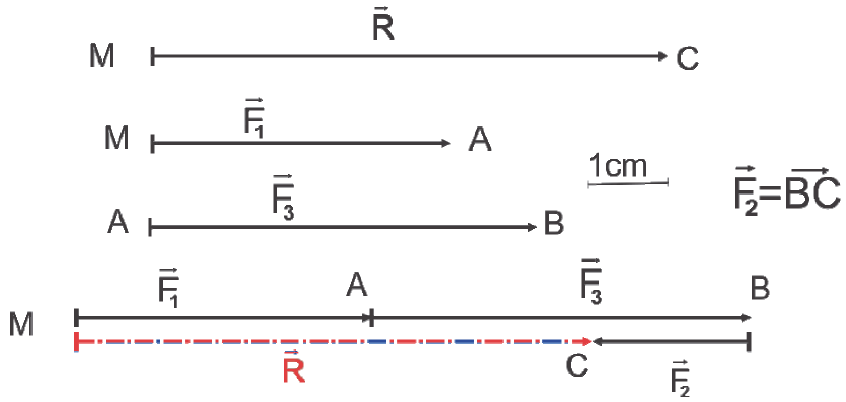
Аналитички: врз основа на равенката (2) се добива:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 3,8 + 4,2 - 5,1 + 2,4 = 5,3N$$

Пример 3. Дадена е резултантата $\vec{R}$ на три сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ кои дејствуваат на материјалната точка во ист правец. Треба да се определи силата F_2, ako е: R = 120 kN; F_1 =70kN; F_3 =90 kN; F_2 =?

Р е ш е н и е:

Графички: (размер : 1 см = 20 kN). Од сл.16 се добива:



Сл. 16

$$\left|\vec{F}_2\right| = -2 \times 20 = -40kN$$

Аналитички:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 \ ; \qquad F_2 = R - F_1 - F_3$$
$$F_2 = 120 - 70 - 90 = -40kN$$

Пример 4. *Дадена е резултантата $\vec{R}$ на четири сили $\vec{F}_1$; $\vec{F}_2$; $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ кои дејствуваат на материјалната точка во ист правец. Треба да се определи силата $\vec{F}_4$*, ако е: R =1250kN;

F_1 = -750kN; F_2 = – 500 kN; F_3 = 600kN; F_4 = ?

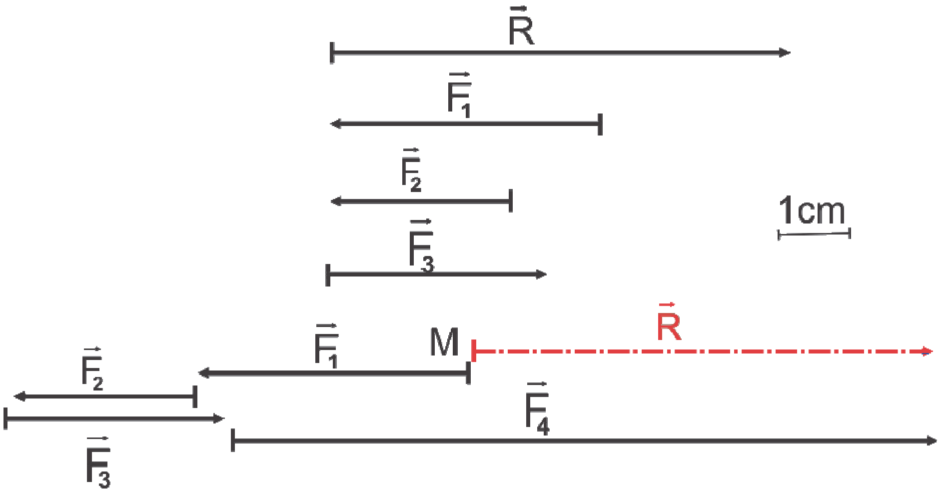
Р е ш е н и е:

Графички: (размер: 1 см = 200 kN). Од сл. 17 се гледа дека е:

$$F_4 = 9,5 \times 200 = 1900kN$$

Аналитички:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \ ; \qquad F_4 = R - F_1 - F_2 - F_3$$
$$F_4 = 1250 - (-750) - (-500) - 600 = 1900kN$$



Сл. 17

Пример 5. *Графички и аналитички да се определи силата* $\vec{F}_5$ *така што материјалната точка* M *да биде во рамнотежа, ако е дадено:*

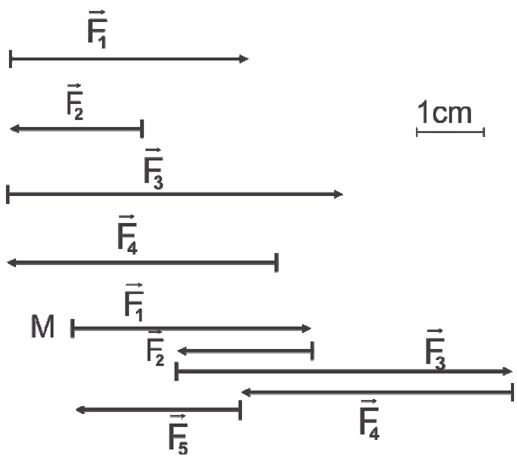
F_1 = 35 kN, F_2 = – 20 kN, F_3 = 50 kN, F_4 = – 40 kN, F_5 = ?

Р е ш е н и е:

Услов за рамнотежа на материјална точка е $R = |\vec{R}| = 0$

Графички: (размер: 1 см =10 kN) Од сл.18 се гледа дека е:

$$F_5 = -2,5 \times 10 = -25kN$$



Сл. 18

Аналитички:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$$
$$F_5 = -F_1 - F_2 - F_3 - F_4$$
$$F_5 = -35 - (-20) - 50 - (-40)$$
$$F_5 = -25kN$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Пример 6. *Дадена е резултантата* R *на четри сили* $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ *кои дејствуваат на материјалната точка во ист правец. Треба да се определи силата* $\vec{F}_3$, ako e: R = 3,8 N; F_1 = – 4,9N; F_2 = 5,2 N; F_3 = ?; F_4 = – 6,1 N.

Решение: $F_3 = 9,6N$

Пример 7. Графички и аналитички да се определи силата $\vec{F}_1$ така што материјалната точка да биде во рамнотежа, ако се дадени силите $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, и $\vec{F}_4$ со ист правец, а различни насоки. F_2 = 6580 N, F_3 = – 4800 N, F_4 = 3200 N.

Решение: $F_1 = -4980N$

2.2 СЛОЖУВАЊЕ И РАЗЛОЖУВАЊЕ НА СИЛИТЕ КОИ ДЕЈСТВУВААТ НА МАТЕРИЈАЛНАТА ТОЧКА ВО РАЗЛИЧНИ ПРАВЦИ

Кога на материјалната точка М дејствуваат две сили $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ во рзлични правци (сл. 19), таа точка ќе се движи во правец на резултантата $\vec{R}$, која графички може да се определи по **метод на паралелограм.** Ова произлегува од вториот аксиом на статиката.

Сл. 19

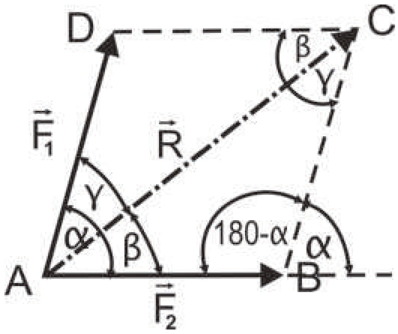
До ист резултат се доаѓа ако во крајната точка силата $\vec{F}_1$ ја нанесеме силата $\vec{F}_2$, водејќи сметка за нивните правци и насоки. Резултантата $\vec{R}$ е вектор кој ги поврзува почетокот на силата $\vec{F}_1$ и крајот на силата $\vec{F}_2$ (сл. 20). Ова е **метод на триаголник** на силите кој има голема примена при графичкото определување на резултантата на произволен број сили кои дејствуваат на една материјална точка во иста рамнина. Резултантата се добива со геометриско собирање на силите.

Сл. 20

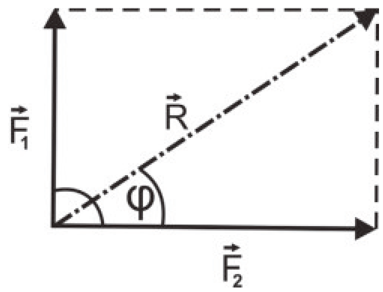
Аналитички, резултантата од две сили кои дејствуват на една материјална точка со различни правци може да се определи со помош на косинусната теорема (сл. 21).

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180-\alpha)$$
$$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha$$
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$$

Специјал случај е ако две сили се нормални една спрема друга (сл.22). Во овој случај резултантата се добива со примена на теоремата на Питагора, а истата произлегува од косинусната теорема, ако е $\alpha = 90°$. $R^2 = F_1^2 + F_2^2; \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.



Сл.21



Сл.22

од $\Delta ABC \Rightarrow R = \overline{AC} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

Положбата на резултантата (сл.21) може да се одредеи со примена на синусното правило:

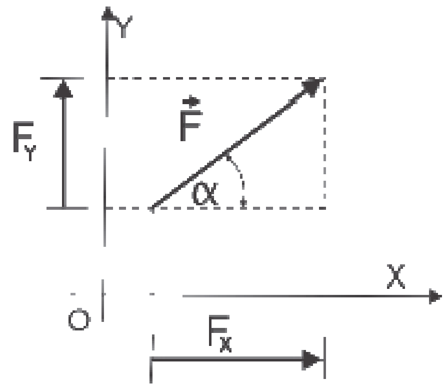
$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(180-\alpha)}; \quad \frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha};$$

$$\sin\beta = \frac{F_2}{R}\sin\alpha; \qquad \sin\gamma = \frac{F_1}{R}\sin\alpha; \qquad (6)$$

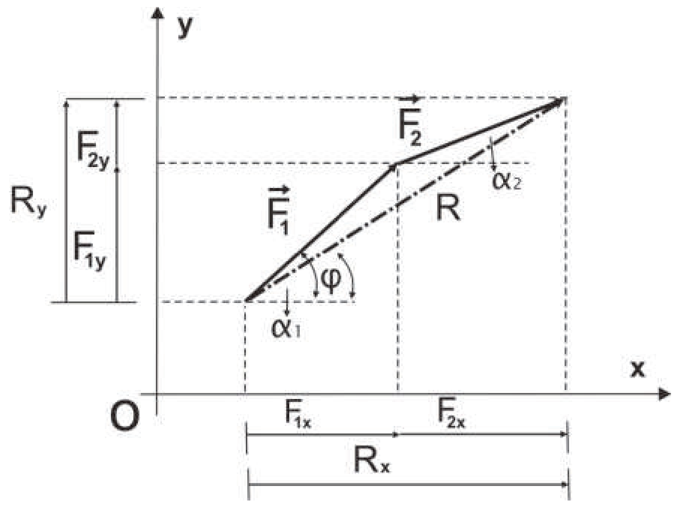
Аналитички резултантата се определува и по **метод на проекции.** Проекција на една сила на две помеѓу себе нормални оски (Декартов координантен систем) се добива со повлекување нормали на оските од почетната и крајната точка на силата. Ортогонална проекција на силата $\vec{F}$ на x – оската е F_x , а на y – оската е F_y (сл.23). Проекциите на силите на оска се скаларни величини, а вредностите на овие проекции се дадени со равенките (7).

$$F_x = F \cdot \cos\alpha$$
$$F_y = F \cdot \sin\alpha \qquad (7)$$

Кога имаме две сили во една рамнина кои дејствуваат на една материјална точка може лесно да се докаже дека проекцијата од резултантата $\vec{R}$ од тие сили е еднаква на алгебарскиот збир од проекциите на силите кои ја даваат таа резултанта, во однос на иста оска. На (сл. 24) прикажана е проекцијата на силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ на две помеѓу себе нормални оски.



Сл.23



Сл.24

Сега проблемот е сведен на определување на резултанта на сили (проекции) со иста нападна линија. Проекцијата од првата сила $\vec{F_1}$ на **x** – оската е F_{1x} , од силата $\vec{F_2}$ е F_{2x}, а проекцијата на нивната резултанта е R_x. Врз основа на р-ка (7) се добива:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1; \quad F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2;$$

Врз основа на р-ka (2) и сл.24 имаме:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x}$$

Проекциите од силите на y – оската се: F_{1y}, F_{2y} , а на нивната резултанта е R_y . Според аналогија добиваме:

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1; \qquad F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2;$$

Односно:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y}$$

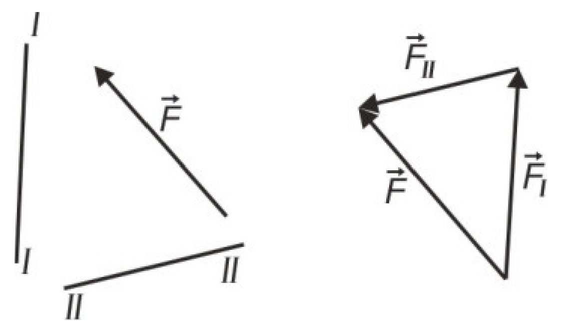
Од овие две резултантни компоненти врз основа на Питагоровата теорема ја добиваме големината на резултантата (8):

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \qquad\qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad\qquad (8)$$

Аголот φ (сл.22) што го заклопува резултантата R со позитивниот дел на **x** – оската е определен со односите (9):

$$tg\varphi = \frac{R_y}{R_x}; \qquad \cos\varphi = \frac{R_x}{R}; \quad \sin\varphi = \frac{R_y}{R} \tag{9}$$

Разложување на сила на две компоненти чии правци се дадени, претставува обратна примена на законот на паралелограм, односно триаголник на сили. Силата $\vec{F}$ треба да ја разложиме на две компоненти
со дадени правци I — I и II —II (сл.25). Самата сила F се нанесува во планот на сили во определен размер.

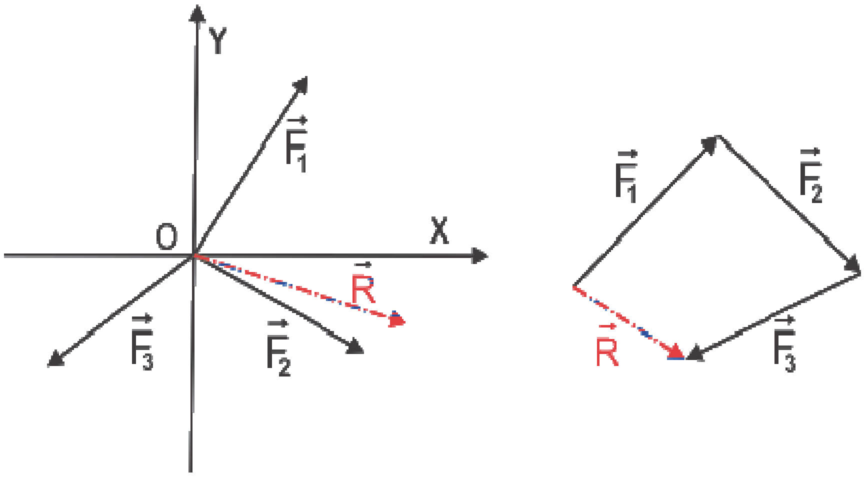


Сл.25

Низ крајните точки на силата $\vec{F}$ повлекуваме паралели со дадените правци и ги добиваме големините на бараните компоненти $\vec{F}_I$ и $\vec{F}_{II}$. Насоките на компонентите се определуваат така што нивната резултанта треба да претставува дадената сила $\vec{F}$.

Кога на една материјална точка дејствува систем од повеќе сили во различни правци, нивната резултанта се определува по **графички** и **аналитички метод.**

При графичко определување на резултантата на систем на сили, цртаме **план на сили.** Во погоден размер ги нанесуваме силите вообичаено редоследно, водејќи сметка за нивните правци и насоки (сл. 26). Со спојување на почетокот на првата сила и крајот на последната ја добиваме резултантата на тој систем на сили. Во случај овие две точки т.е. почетокот на првата и крајот на последната сила да се поклопуваат, значи дека резултантата е еднаква на нула и материјалната точка е во рамнотежа. Во тој случај планот на силите е **затворен.** Насоките на силите се надоврзуваат една на друга т.е. се **бркаат.** Тоа е **графички услов за рамнотежа.**



Сл. 26

Систем од сили кои дејствуваат на материјалната точка во произволни правци во една рамнина е во рамнотежа ако сите сили надоврзани една на друга сочинуваат затворен план на сили.

Математички изрази на резултантните компоненти се дадени со равенките (10);

$$R_x = \sum_{i=1}^{i=n} F_{ix}; \qquad R_y = \sum_{i=1}^{i=n} F_{iy}; \qquad (10)$$

Систем од сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots\ldots \vec{F}_n$, со произволни правци и насоки, кои напаѓаат една точка, ќе биде во рамнотежа ако нивната резултанта, односно двете компоненти на резултантата се еднакви на нула.

$$R_x = \sum_{i=1}^{i=n} F_{ix} = 0; \qquad R_y = \sum_{i=1}^{i=n} F_{iy} = 0; \qquad (11)$$

Во практиката се сретнуваме со овие равенки во скратен облик (12):

$$\sum X = 0 \quad ; \quad \sum Y = 0 \qquad (12)$$

Со зборови искажано, тоа значи: **Кога на една материјална точка дејствуваат повеќе сили, треба збирот на сите вертикални и сите хоризонтални проекции да биде еднаков на нула, за таа точка да биде во рамнотежа.**

Равенките (12) **се основни аналитички услови за рамнотежа на систем од сили во рамнина кои напаѓаат материјална точка.**

Аналитичкиот метод е поточен од графичкиот (каде се јавуваат мали грешки при цртањето), но двата методи заемно се контролираат. При решавањето на задачите во статиката, а особено при испитувањето на рамнотежа на врзани тела, честопати се сретнуваме со случаи кога на тело дејствуваат три сили со произволни правци во иста рамнина. При решавање на вакви задачи го користиме правилото за рамнотежа на три сили, кое гласи: **Слободно круто тело на кое дејствуваат три сили со произволни правци во една рамнина е во рамнотежа кога**

нападнатите линии на тие сили се сечат во една точка и силите образуваат затворен триаголник на сили.

Постапката при решавање на ваквите задачи започнува со ослободување на врските и нивно заменување со непознати реакции, во согласност со петтиот аксиом на статиката, со што се добива дијаграм на слободно материјално тело. Во ова поглавје како врски ќе бидат спомнати само стапови кои пренесуваат сили (реакции) само по должина на својата оска. Во примерите (12) и (13) детално е прикажана целата постапка.

Во неколку карактеристични примери се прикажани методи на сложување и разложување на силите во рамнина кои напаѓаат една материјална точка во произволни правци.

Р е ш е н и п р и м е р и

Пример 8. *Графички и аналитички да се определи резултантата на силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ кои помеѓу себе заклопуваат агол α (сл. 27),*

Ако се дадени:

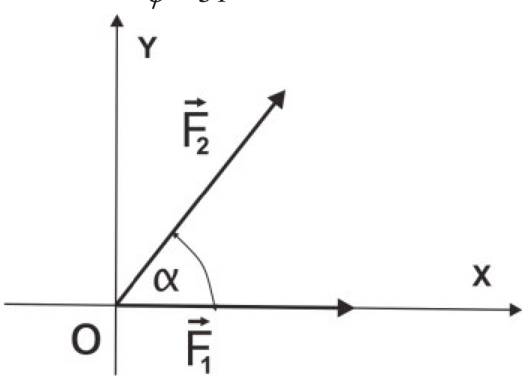
$$F_1 = 6,8kN; \qquad F_2 = 9,2kN; \qquad \alpha = 53^\circ$$

Решение:

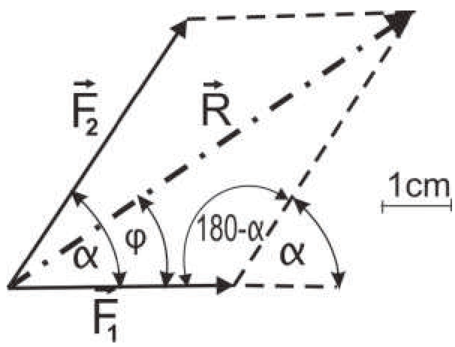
Графички:

(размер: $1cm = 2kN$) Од сл. 28 се гледа дека е:

$$R = 7,2 \times 2 = 14,4kN$$
$$\varphi = 31^\circ$$



Сл. 27



Сл. 28

Аналитички:

Според р-ка (5) ќе биде:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha$$
$$R^2 = 6,8^2 + 9,2^2 + 2 \cdot 6,8 \cdot 9,2 \cos 53^\circ = 46,24 + 84,64 + 2 \times 6,8 \times 9,2 \cdot 0,6018$$
$$R^2 = 206,179; \qquad R = \sqrt{206,179} = 14,3589kN$$
$$\sin\varphi = \frac{F_2}{R}\sin(180-\alpha) = \frac{9,2}{14,3589}\sin(180-53^\circ) = 0,5117$$
$$\varphi = 30^\circ 46' 37''$$

Контрола:

Според р-ка (8) ќе биде:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 6,8 \cdot \cos 0° = 6,8 \cdot 1 = 6,8kN$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 9,2 \cdot \cos 53° = 9,2 \times 0,6018 = 5,536698kN$$
$$F_{2y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 6,8 \cdot 0 = 0$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 9,2 \cdot \sin 53° = 9,2 \times 0,7986 = 7,34745kN$$
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 6,8 + 5,536698 = 12,3367kN$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 + 7,34745 = 7,34745kN$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{12,3367^1 + 7,34745^2} = \sqrt{206,179} = 14,3589kN$$
$$tg\varphi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{7,34745}{12,3367} = 0,59557; \qquad \varphi = 30^\circ 46' 37''$$

Вредноста на резултантата добиена по консинусната теорема и по методот на проекции се наполно еднакви.

Пример 9. *Графички и аналитички да се определи резултантата на дадените сили кои дејствуваат на една материјална точка во иста рамнина (сл. 29), ако се дадени:*

$$F_1 = 12N; \qquad F_2 = 18N; \qquad F_3 = 16N;$$
$$\alpha_1 = 129^\circ; \qquad \alpha_2 = 315^\circ; \qquad \alpha_3 = 220^\circ$$

Р е ш е н и е:

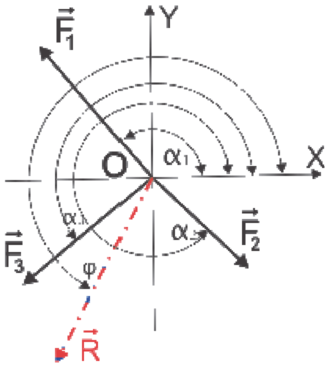
Графички:

(размер: 1 см = 4 N)

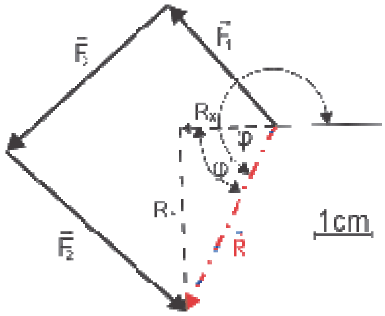
Од сл. 30 се гледа дека е:

$$R = 3{,}85 \times 4 = 15{,}4N$$
$$\varphi = 242^\circ$$

Забелешка: Во полигонот на силите не мора да се цртаат силите редоследно, но мора да се нанесат сите сили.



Сл. 29



Сл.30

Аналитички:

Според (8) ќе биде:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 12 \cdot \cos 129° = 12 \cdot (-0,6293) = -7,5516N$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 18 \cdot \cos 315° = 18 \cdot 0,7071 = 12,7279N$$
$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha_3 = 16 \cdot \cos 220° = 16 \cdot (-0,7660) = -12,256N$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 12 \cdot \sin 129° = 12 \cdot 0,7771 = 9,32575N$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 18 \cdot \sin 315° = 18 \cdot (-0,7071) = -12,7279N$$
$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin\alpha_3 = 16 \cdot \sin 220° = 16 \cdot (-0,6428) = -10,2846N$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$
$$R_x = -7,5516 + 12,7279 - 12,256 = -7,0797N$$
$$R_y = 9,32575 - 12,7279 - 10,2846 = -13,68695N$$

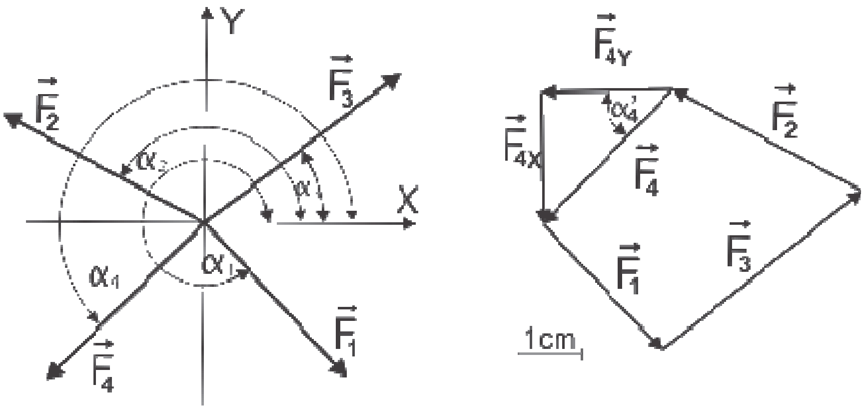
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-7,0797)^2 + (-13,68695)^2} = 15,40957N$$
$$tg\varphi' = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-13,68695}{-7,0797} = 1,9333; \qquad \varphi' = 62^{\circ}38'58''$$
$$\varphi = 180^{\circ} + \varphi' = 242^{\circ}38'58''$$

Пример 10. *Графички и аналитички да се определи големината на правецот и насока на силата $\vec{F}_4$ така што таа да биде во рамнотежа со силите $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, ако се дадени:*

$$F_1 = 8N; \qquad F_2 = 10N; \qquad F_3 = 12N$$
$$\alpha_1 = 313^{\circ}; \qquad \alpha_2 = 151^{\circ}; \qquad \alpha_3 = 38^{\circ}$$

Р е ш е н и е:

Графички: (размер $1cm = 3N$)



Сл.31

Од сл. 31 се гледа дека е:

$$F_4 = 3 \cdot 3 = 9,0N; \qquad \alpha_4 = 226^\circ$$

Аналитички:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 8 \cdot \cos 313^\circ = 8 \cdot 0,68199 = 5,45598N$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 10 \cdot \cos 151^\circ = 10 \cdot (-0,8746) = -8,746N$$
$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha_3 = 12 \cdot \cos 38^\circ = 12 \cdot 0,788 = 9,456N$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 8 \cdot \sin 313^\circ = 8 \cdot (-0,73135) = -5,8508N$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 10 \cdot \sin 151^\circ = 10 \cdot 0,4848 = 4,848N$$
$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin\alpha_3 = 12 \cdot \sin 38^\circ = 12 \cdot 0,61566 = 7,3879N$$
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 0$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0$$

$$F_{4x} = -F_{1x} - F_{2x} - F_{3x} = -5,45598 - (-8,746) - 9,946 = -6,16598N$$
$$F_{4y} = -F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} = -(-5,8508) - 4,848 - 7,3879 = -6,3851N$$
$$F_4 = \sqrt{F_{4x}^2 + F_{4y}^2} = \sqrt{(-6,16598)^2 + (-6,3851)^2} = 8,8763N$$

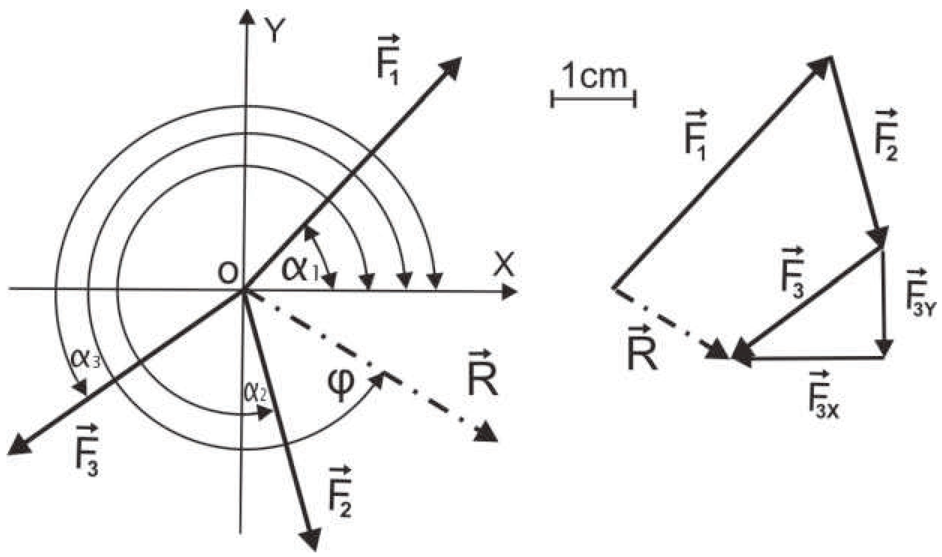
$$tg\alpha' = \frac{F_{4y}}{F_{4x}} = \frac{-6,3851}{-6,16598} = 1,03554; \qquad \alpha_4' = 46^\circ 00' 01''$$
$$\alpha_4 = 180 + \alpha_4' = 226^\circ 00' 01''$$

Пример 11. *Графички и аналитички да се определи големината, правецот и насоката на силата $\vec{F}_3$ така што со силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ да ја даде резултантата $\vec{R}$, ако се дадени:*

$$F_1 = 25kN; \qquad F_2 = 15kN; \qquad R = 12kN$$
$$\alpha_1 = 48^\circ \qquad \alpha_2 = 290^\circ \qquad \varphi = 335^\circ$$

Р е ш е н и е:

Графички: (размер: $1cm = 5kN$)
Од сл. 32 се гледа дека е: $F_3 = 2{,}9 \cdot 5 = 14{,}5kN; \qquad \alpha_3 = 221^\circ$



Сл.32

Аналитички:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 25 \cdot \cos 48^\circ = 25 \cdot 0{,}6601 = 16{,}728kN$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 15 \cdot \cos 290^\circ = 15 \cdot 0{,}342 = 5{,}1303kN$$

$$R_x = R \cdot \cos\varphi = 12 \cdot \cos 335^\circ = 12 \cdot 0{,}9063 = 10{,}8757kN$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 25 \cdot \sin 48^\circ = 25 \cdot 0{,}7431 = 18{,}5786kN$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 15 \cdot \sin 290^\circ = 15 \cdot (-0{,}93969) = -14{,}0954kN$$

$$R_y = R \cdot \sin\varphi = 12 \cdot \sin 335^\circ = 12 \cdot (-0{,}4226) = -5{,}0714kN$$

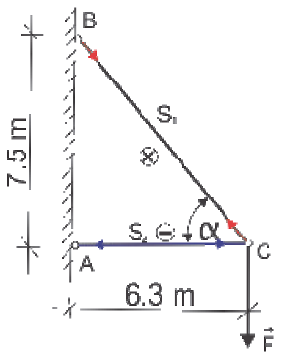
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$
$$F_{3x} = R - F_{1x} - F_{2x} = 10,8757 - 16,728 - 5,1303 = -10,9826kN$$
$$F_{3y} = R - F_{1y} - F_{2y} = -5,0714 - 18,5786 - (-14,0954) = -9,5546kN$$
$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2} = \sqrt{(-10,9826)^2 + (-9,5546)^2} = 14,557kN$$
$$tg\alpha_3 = \frac{F_{3y}}{F_{3x}} = \frac{-9,554}{-10,9826} = 0,8699;$$
$$\alpha_3 = 41^0 01' 15''$$
$$\alpha_3 = 180 + \alpha_3 = 221^0 01' 15''$$

Да се потсетиме: табела за аналитичко определување на вредноста на аголот φ во зависност од предзнаците на компонентите R_x и R_y.

ТАБЕЛА

КВАД.	R_x	R_y	АГОЛ
I.	+	+	$\varphi = \varphi', \varphi' < 90°$
II.	-	+	$\varphi = 180° - \varphi'$
III.	-	-	$\varphi = 180° + \varphi'$
IV.	+	-	$\varphi = 360° - \varphi'$

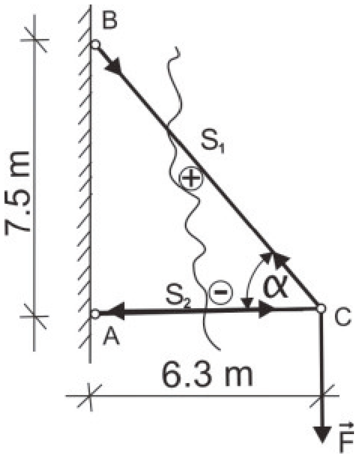
Пример 12. *Аналитички треба да се определат силите во стаповите BC ($\vec{S}_1$) и AC ($\vec{S}_2$), така што системот да биде во рамнотежа (сл.33), ако силата е* $\vec{F} = 12kN$.



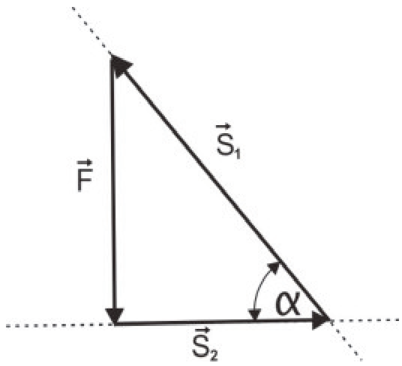
Сл.33

Р е ш е н и е:

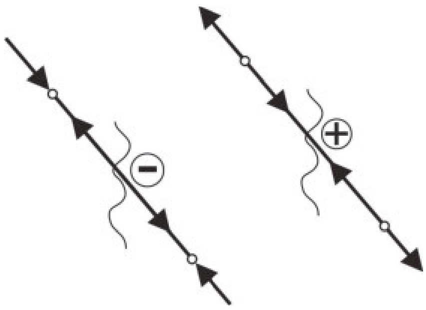
Сите три сили $(\vec{F}, \vec{S}_1$ и $\vec{S}_2)$ се сечат на една точка односно јазол C. Ако јазолот C го исечеме и го набљудуваме одделно, добиваме еден систем од три сили кои се сечат во една точка. Едната сила $\vec{F}$ е позната, а другите две $(\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2)$ можеме да ги определиме.



Сл.34а



Сл.34б



Сл.34в

Силите во стаповите се реакции на надворешното дејство на сили.

Знаците за сили во стаповите по конвенција се земаат при истегнување на стапот + (позитивен), а при притисок - (негативен).

Од сл. 34в се гледа дека е:

$$S_1 = 5,2 \cdot 3 = 15,6kN \text{ (истегнување)}$$

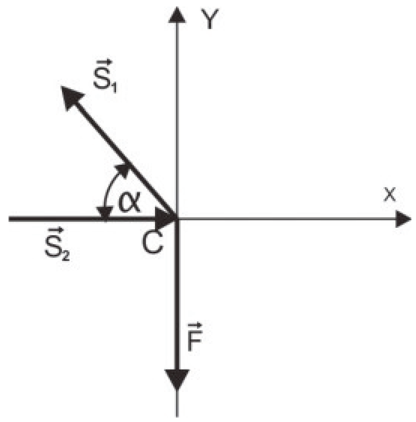
$$S_2 = 3,4 \cdot 3 = 10,2kN \text{ (притисок)}$$

Аналитички: По метод на проекции:

Почетокот на правоаголен координантен систем го поставуваме во исечениот јазол C (сл.35). Со помош на двата аналитички услова за рамнотежа на еден систем од сили р-ка (12) кои напаѓаат на една точка во иста рамнина, ќе имаме: прво од сл.34а

$$tg\alpha = \frac{7,5}{6,3} = 1,19; \qquad \alpha = 49^\circ 58' 11''$$

$$\sin\alpha = 0,7657; \qquad \cos\alpha = 0,6432$$



Сл.35

$$\sum Y = 0$$

$$-F + S_1 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$S_1 = \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{12}{0,7656} = 15,672kN \text{ (истегнување)}$$

$$\sum X = 0$$

$$S_2 - S_1\cos\alpha = 0; \quad S_2 = S_1 \cdot \cos\alpha = 15,672 \cdot 0,6432 = 10,08kN \text{ (притисок)}$$

Контрола: Од сл. 34.,се гледа:

$$tg\alpha = \frac{F_1}{S_2}; \qquad S_2 = \frac{F}{tg\alpha} = \frac{12}{1,19} = 10,08kN$$

$$\sin\alpha = \frac{F}{S_1}; \qquad S_1 = \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{12}{0,7657} = 15,672kN$$

$$\cos\alpha = \frac{S_2}{S_1}; \qquad 0,6432 = \frac{10,08}{15,672}; \qquad 0,6432 = 0,6432$$

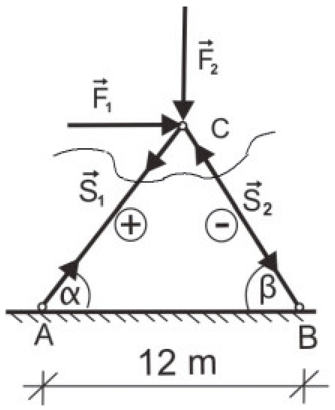
Забелешка: При аналитичко решавање на вакви задачи по метод на проекции може да се случи за сила да добиеме негативна вредност. Тоа значи дека претпоставената насока на таа сила не е точна. Вистинската насока е обратна од претпоставената.

Пример 13. *Аналитички да се определат* силите $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, ако е дадено:

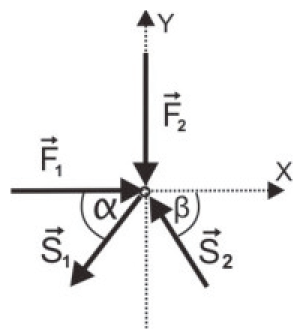
$F_1 = 180N; \quad F_2 = 160N$

$\alpha = 49^\circ; \quad \beta = 62^\circ$ растојението AB = 12 m

Р е ш е н и е :



Сл. 37



Сл. 38

Аналитички: Според сл. 37:

$$\sum X = 0;$$

$$F_1 - S_1 \cdot \cos\alpha - S_2 \cdot \cos\beta = 0$$

$$180 - S_1 \cdot 0,656 - S_2 \cdot 0,4695 = 0$$

$$S_1 = \frac{180 - S_2 \cdot 0,4695}{0,656}$$

$$\sum Y = 0;$$

$$-F_2 - S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\beta = 0$$

$$-160 - S_1 \cdot 0,7547 + S_2 \cdot 0,883 = 0$$

$$-160 - 0,7547\left(\frac{180 - S_2 \cdot 0,4695}{0,656}\right) + S_2 \cdot 0,883 = 0$$

$S_2 = 257,919N$ притисок; $S_1 = 89,797N$ затегање

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Пример 14: *Графички и аналитички да се определи големината, правецот и насоката на силата $\vec{F}_5$ така што таа да биде во рамнотежа со силите $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ ако се дадени:*

$F_1 = 6,3N; \quad F_2 = 9,2N; \quad F_3 = 8,1N; \quad F_4 = 7,0N$

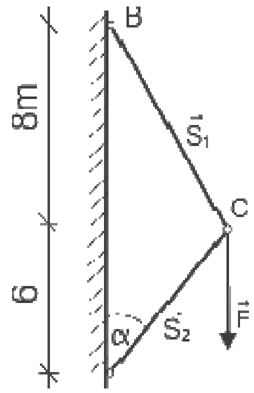
$\alpha_1 = 218^\circ; \quad \alpha_2 = 39^\circ; \quad \alpha_3 = 115^\circ; \quad \alpha_4 = 251^\circ$

Решение: $F_5 = 4,394N; \quad \alpha_5 = 323^\circ 10' 24''$

Пример 15. *Аналитички да се определат силите* $\vec{S}_1$ *и* $\vec{S}_2$ *(сл. 39), ако е дадено:*

$$F = 25kN$$
$$\alpha = 36^\circ$$

Решение: $S_1 = 16,2689kN$ (затегање) $S_2 = 13,2436kN$ (притисок)



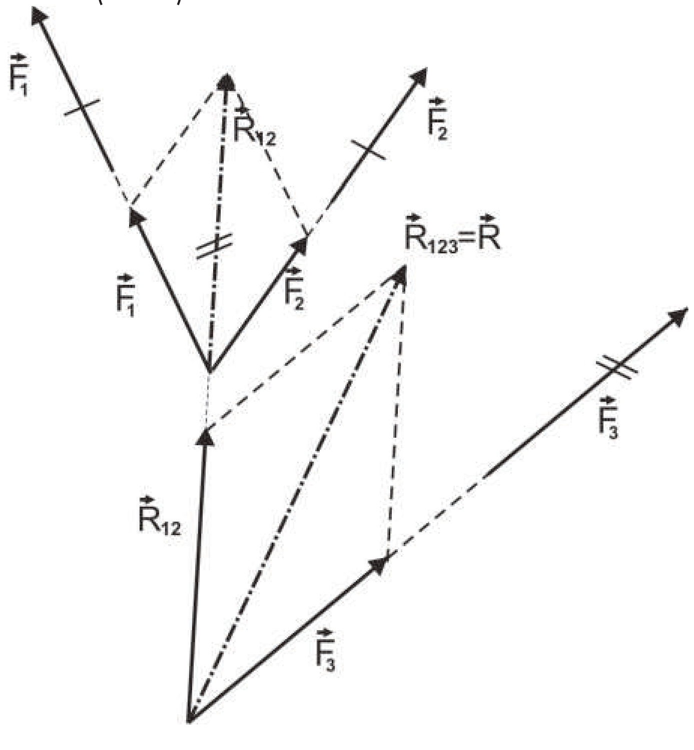
Сл.39

3. СТАТИКА НА КРУТА ПЛОЧА

Во статика на материјална точка ги проучуваме условите на рамнотежа и еквиваленција на сили кои дејствуваат на една материјална точка. Во статика на крута плоча ќе ги анализираме условите на рамнотежа и еквиваленција на сили кои дејствуваат во различни точки на крута плоча.

Плоча претставува материјално тело на кое едната димензија (висина) е многупати помала од другите две (должина и ширина). Во статиката воведовме поим крута плоча, т.е. идеално цврста плоча којашто не се деформира, односно не ја менува својата форма ниту волумен под влијание на било какви сили. Во природата идеално цврсто тело не постои, но поради упростување на сложени појави кои настануваат поради еластични и пластични особини на телата, воведуваме претпоставка за крута плоча.

Проблемот при анализирање на сили кои дејствуваат на крута плоча во произволни точки може да го сведеме на проблем на сложување на сили кои дејствуваат на материјалната точка, со помош на третиот аксиом на статиката, ако постепено две по две сили доведуваме да дејствуваат во иста точка (сл. 40)



Сл.40

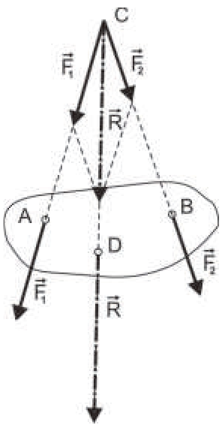
Да се потсетиме, од третиот аксиом на статиката е познато дека со поместување на нападната точка на силата која дејствува на круто тело или плоча по должина на нејзината нападната линија, не се менува дејството на силата.

3.1 СЛОЖУВАЊЕ НА СИЛИ СО ПРОИЗВОЛНИ ПРАВЦИ СО ПОМОШ НА ВЕРИЖЕН ПОЛИГОН

Набљудуваме крута плоча на која дејствуваат силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ во нападнатите точки A и B (сл. 41). Според спомeнатиот трет аксиом на статиката силите може да ги поместиме по должината на нивното дејствување во точката C, која е пресечена точка на нивните нападнати линии. По метод на паралелограмот ја определуваме резултантата R. Нападнатата точка на резултантата мора да лежи на нејзината нападната линија,да речеме во точката D.

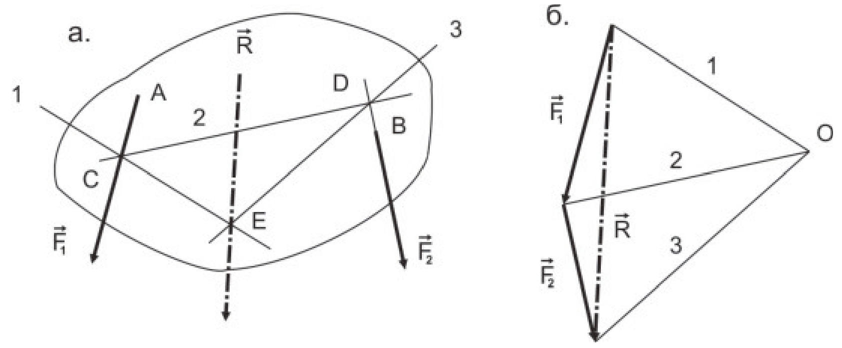
Во случај да имаме систем на сили кои дејствуваат на крута плоча со различни правци кои не се сечат на цртежот или се паралелни, резултантата се определува со помош на **верижен полигон.** Набљудуваме крута плоча на која дејствуваат силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ во нападнатите точки A и B (сл.42) чии правци не се сечат на цртежот.

Во погоден размер ја нанесуваме силата $\vec{F}_1$ и на неа ја надоврзуваме силата $\vec{F}_2$ паралелно на нивните нападнати линии.



Сл.41

Почетокот на првата сила и крајот на втората, ја дефинираат резултантата. т.е. нејзината големина и насока. Тоа е план на силите (сл.42.б).



Сл.42

За определување на нападнатата линија на резултантата во рамнина на крута плоча користиме верижен полигон. Ја усвојуваме произволно точката O наречена **пол** во близина на планот на силите и ја поврзуваме со почетокот и крајот на сите сили. Овие линии 1, 2 и 3 се викаат **зраци.** Всушност, силата $\vec{F_1}$ ја разложуваме на компоненти $\vec{1}$ и $\vec{2}$, силата $\vec{F_2}$ на компонентите $\vec{2}$ и $\vec{3}$, а пак самата резултанта на компоненти $\vec{1}$ и $\vec{3}$. Силите $\vec{F}$,$\vec{1}$ и$\vec{2}$ се во рамнотежа затоа што формираат триаголник, што значи се сечат во точка. Сега повлекуваме паралела со зракот 1 низ произволна точка C на нападнатата линија на силата $\vec{F_1}$. Од точката C повлекуваме паралела со зракот 2 до точката D, односно до пресек со правецот на силата $\vec{F_2}$. Од точката D го повлекуваме зракот 3 до пресек со првиот зрак, односно точката Е. Низ точката Е поминува нападната линија на резултантата $\vec{R}$. *Полигонот што го сочинуваат зраците* 1, 2 *и* 3 *потсетува на вериги и се вика* **верижен полигон.**

Со усвојување на некој друг пол, може да ја повториме целата оваа постапка и ќе се увериме во наполно истоветен резултат.

Метод на верижен полигон за графичко сложување на сили има голема примена при определување на резултантата кога дејствуваат повеќе сили со произволни или паралелни правци на крута плоча.

Досегашното теоретско запознавање со методот на сложување на сили со произволни или паралелни правци кои дејствуваат на крута плоча или греда ќе го провериме преку следниве примери.

Р Е Ш Е Н И П Р И М Е Р И

Пример 16. *На крута греда дејствуваат две паралелни сили* $\vec{F_1}$ *и* $\vec{F_2}$ *со исти насоки на меѓусебно растојание од* $l = 7m$. *треба да се определи големината, насока и правец на резултантата* $\vec{R}$ *со помош на верижен полигон, ако се вредностите на силите* $F_1 = 25kN; F_2 = 35kN.$

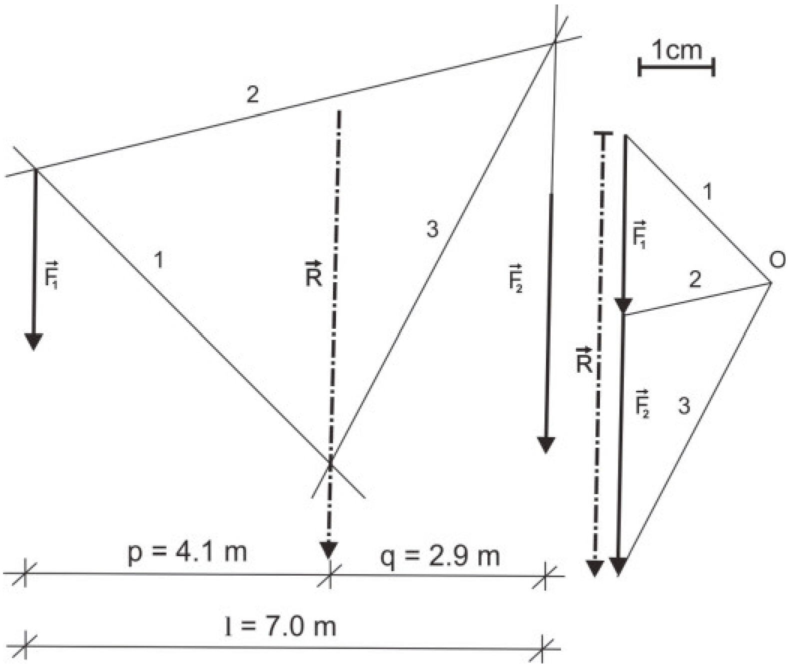
Р е ш е н и е:

(размер: за должини $1cm = 1m;$ за сили $1cm = 10kN$)

Од сл.43 се гледа дека е:

$$R = 6\times10 = 60kN\,; \quad p = 4{,}1m\,; \quad q = 2{,}9m$$

Од овој пример може да се види дека резултантата на две паралелни сили има големина еднаква на нивниот алгеборски збир $(R = F_1 + F_2)$, има иста насока, паралелна е со нив и нејзината нападна линија се наоѓа меѓу тие две сили,поблиску до големата.



Сл.43

Пример 17. *Со помош на верижен полигон треба да се определи резултантата на две паралелни сили со спротивни насоки (антипаралелни сили) кои дејствуваат на крута плоча, ако се дадени:*

$$F_1 = -150kN \;\; ; \;\; F_2 = 100kN \;\; ; \;\; l = 1,4m$$

Р е ш е н и е:

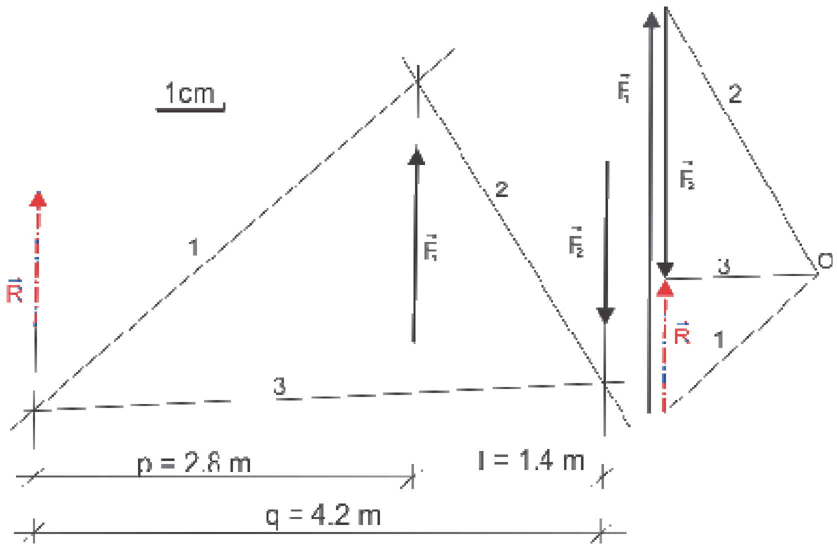
(размер: за должини $1cm = 0,5m$; за сили $1cm = 25kN$)

Од сл. 44 се гледа дека е:

$$R = 2 \times 25 = 50kN \quad \text{(со насока иста како } \vec{F}_1 \text{)}$$

$$p = 5,6 \times 0,5 = 2,8m \;\; ; \quad q = 8,4 \times 0,5 = 4,2m$$

Од овој пример може да се види дека резултантата на две паралелни сили со спротивни насоки и различни интензитети (антипаралелни сили) има големина еднаква на нивната разлика $(R = F_2 - F_1)$, со насока на поголемата сила, паралелна е со нив, а нејзината нападна линија е надвор од силите и тоа од страна на поголемата сила.



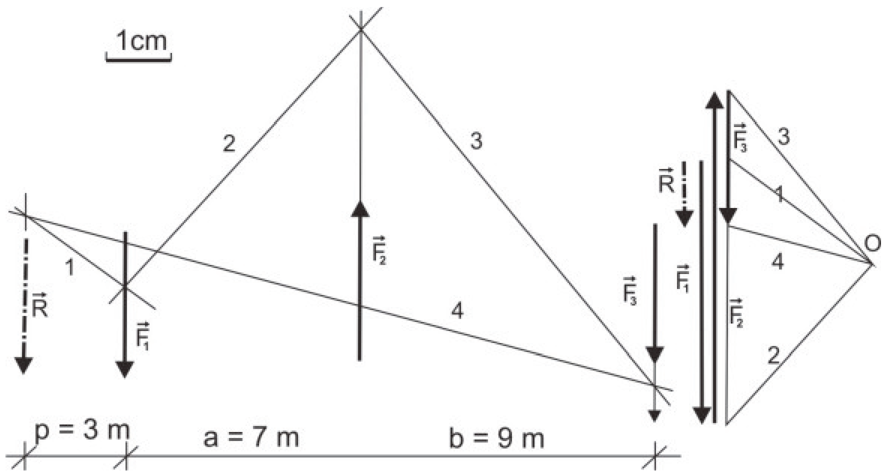
Сл.44

Графички и аналитички докази за констатациите изречени во примерите 16 и 17 постојат, но тука нема да ги изведуваме.

Пример 18. *Со помош на верижен полигон треба да се определи резултантата на систем паралелни сили со произволни насоки, ако се дадени:* $F_1 = 16N$; $F_2 = -20N$; $F_3 = 8N$; $a = 7m$ *(растојанието меѓу* $\vec{F}_1$ *и* $\vec{F}_2$*);* $b = 9m$ *(растојанието меѓу* $\vec{F}_2$ *и* $\vec{F}_3$*).*

Решение:
(размер : за должини $1cm$ = $2m$ за сили $1cm$ = $4N$)
Од сл.45 се гледа дека е:

$$R = 1 \cdot 4 = 4N; \qquad p = 1,5 \cdot 2 = 3m$$



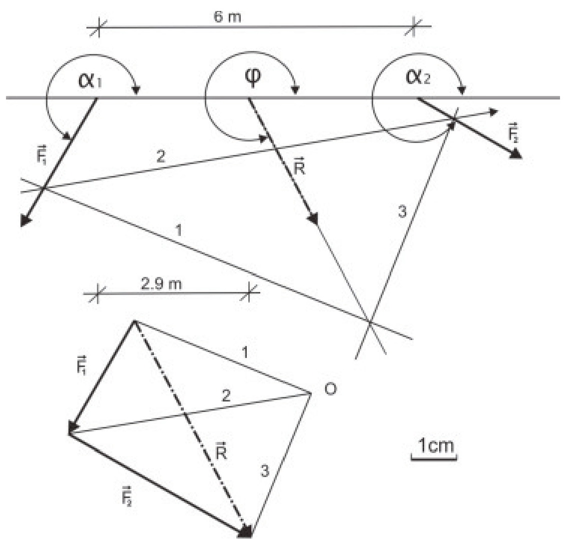
Сл.45

Пример 19. *Со помош на верижен полигон треба да се определи резултантата на две произволни сили кои дејствуваат на крута греда, ако се дадени:* $F_1 = 5kN$; $\alpha_1 = 240$; *дејствува во точка А и* $F_2 = 8kN$; $\alpha_2 = 330$; *дејствува во точка В. Растојанието* $\overline{AB} = 6m$ *.*

Решение:

(размер: за должини $1cm$ = $1m$ за сили $1cm$ = $2kN$)
Од сл.46 се гледа дека е:

$$R = 4,7 \cdot 2 = 9,4kN; \quad \varphi = 298^\circ \text{ растојанието } \overline{AC} = 2,9m \ .$$



Сл.46

<u>ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ</u>

Пример 20. *Со помош на верижен полигон треба да се определи резултантата на систем паралелни сили со произволни насоки, ако се дадени:* $F_1 = -8kN$; $F_2 = 12kN$; $F_3 = 6kN$; $a = 3m$ *(растојанието меѓу* $\vec{F}_1$ *и* $\vec{F}_2$ *);* $b = 4m$ *(растојанието меѓу* $\vec{F}_2$ *и* $\vec{F}_3$ *)*

Решение: $R = 10kN$; $p = 7,8m$.

Пример 21. *Со помош на верижен полигон треба да се определи резултантата на две произволни сили кои дејствуваат на крута греда, ако се дадени:* $F_1 = 65N$; $\alpha_1 = 42^\circ$ *;* $F_2 = 90N$; $\alpha_2 = 110^\circ$, силата $\vec{F}_1$ дејствува во точката А, а силата $\vec{F}_2$ во точката В. Растојанието $\overline{AB} = 8m$.

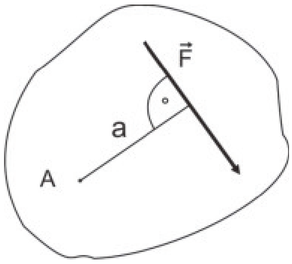
Решение: $R = 129N$; $\varphi = 82^\circ$ растојанието $\overline{AC} = 5,2m$.

3.2 СТАТИЧКИ МОМЕНТ НА СИЛА

Кога на слободно материјално тело дејствува сила со одредена големина, правец и насока, тоа тело се движи во правец и насока на таа сила. Тоа е транслаторно движење. Во случај на тоа тело да постои една неподвижна точка или оска надвор од нападнатата линија на силата, телото нема да се движи транслаторно туку ќе ротира. Тоа обртно дејство на силата околу произволната точка го нарекуваме **статички момент на силата**, и се обележува со М. Точката А околу која се врши ротирање се вика **моментна точка**, а нормалното растојание од таа точка до силата е **крак на силата** (сл.47).

Статички момент на силата претставува производ на интензитетот на силата F и нејзиното најкратко (нормално) растојание "a" до набљудуваната точка (моментната точка):

$$M = F \times a \qquad (13)$$

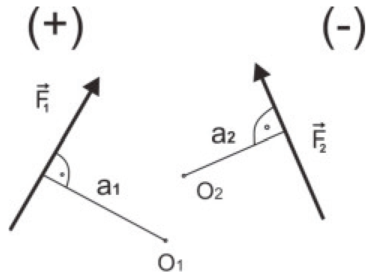


Сл.47

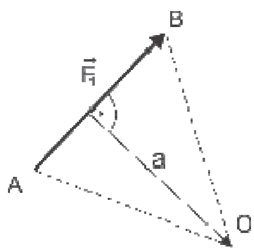
Димензии на статичкиот момент се Nm или kNm. Во случај кога силата ротира во однос на моментната точка O_1 во насока на стрелката на часовникот (сл.48), велиме дека статичкиот момент е позитивен (+), а доколку се врти во спротивна насока, тогаш статичкиот момент е негативен (-).

Големината на статичкиот момент на силата е еднаков на двојната површина на триаголникот што го сочинуваат самата сила $\vec{F}$ како основица и кракот " a " како висина (сл.49).

$$A_\Delta = \frac{\overline{AB} \cdot a}{2} = \frac{F \cdot a}{2} = \frac{M}{2}; \qquad M = 2A_\Delta$$



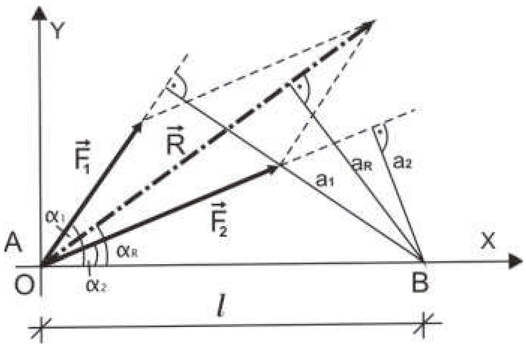
Сл.48



Сл.49

Статичкиот момент за некоја точка е еднаков на нула во случај кога нападнатата линија на силата поминува низ таа точка. Кога во една рамнина дејствува систем на сили, односот што постои меѓу статичките моменти на силите и статичкиот момент на нивната резултанта е даден од Варињон (PIERRE VARIGNON, 1654 — 1722 год.)

За силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ кои дејствуваат на материјалната точка A со метод на паралелограм ја определуваме резултантата $\vec{R}$ (сл. 50). Во точка A го поставуваме координативниот систем. Аглите ги обележуваме со α_1, α_2 и α_R. Статичкиот момент на силите $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и нивната резултанта $\vec{R}$ ќе ги определиме во однос на моментната точка B на растојание l од точката O, која лежи на апсцисата **x**.



Сл.50

$$M_R = R \cdot a_R; \qquad M_1 = F_1 \cdot a_1; \qquad M_2 = F_2 \cdot a_2;$$

Од р-ка. (8) следи: $R_y = F_{1y} + F_{2y}$;

$$R \cdot \sin\alpha_R = F_1 \cdot \sin\alpha_1 + F_2 \cdot \sin\alpha_2$$

Ако оваа равенка ја множиме со l ќе се добие:

$$R \cdot l \cdot \sin\alpha_R = F_1 \cdot l \cdot \sin\alpha_1 + F_2 \cdot l \cdot \sin\alpha_2$$

Од сл.50 се гледа дека е:

$$\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{l}; \Rightarrow a_1 = l \cdot \sin\alpha_1; \qquad \sin\alpha_2 = \frac{a_2}{l}; \Rightarrow a_2 = l \cdot \sin\alpha_2$$

$$\sin\alpha_R = \frac{a_R}{l}; \qquad R \cdot a_R = F_1 a_1 + F_2 \cdot a_2; \qquad M_R = M_1 + M_2$$

или за повеќе сили ќе биде:

$$M_R = \sum_{i=1}^{i=n} M_{Fi} \qquad (14)$$

Од тука произлегува следното правило:

Статичкиот момент на резултантата на две или повеќе сили во однос на иста моментна точка која лежи во рамнината на силите, е еднаков на алгебарскиот збир на

моментите на тие сили за иста моментна точка. Ова е моментно правило или Варињонова теорема.

За систем на сили кои се во рамнотежа, резултантата е еднаква на нула, па и статичкиот момент на таков систем на сили е еднаков на нула. Тој услов на рамнотежа на силите се изразува со:

$$\sum M = 0 \qquad (15)$$

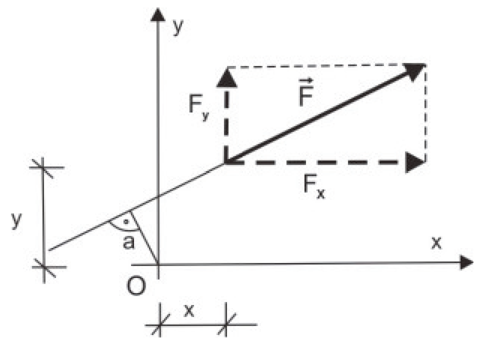
Врз основа на р-ка (12) и р-ка (15) може да се констатира аналитички услов за рамнотежа: телото е во рамнотежа кога алгебарскиот збир на сите вертикални и хоризонтални компоненти на сили кои дејствуваат во една рамнина на тоа тело е еднаков на нула и кога збирот на моментите на сите сили во однос на некоја произволна точка во таа рамнина е еднаков на нула, (16).

$$\sum \mathrm{X} = 0 \;;\quad \sum Y = 0 \;;\; \sum M = 0 \qquad (16)$$

Аналитичкиот израз за статичкиот момент на силата во однос на произволна точка (каде го поставуваме почетокот на кординантниот систем) може да се даде со примена на Варињоновата теорема (сл.51), од каде произлегува равенката (17).

$$M^{\circ}{}_{F} = M^{\circ}{}_{Fx} + M^{\circ}{}_{Fy}$$

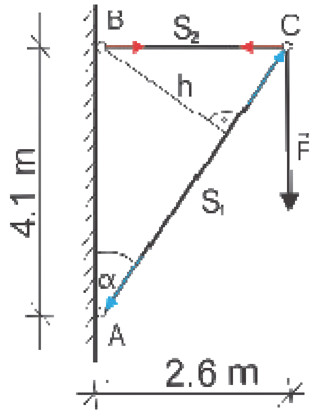
$$M^{\circ}{}_{F} = F \cdot a = F_x \cdot y - F_y \cdot x \qquad (17)$$



Сл.51

РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

Пример 22. *Со примена на моментното правило да се определат силите $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ во стаповите AC и BC (сл. 52) ако е дадена силата $\vec{F}$ =50kN. Резултатот да се провери по метод на проекции.*



Сл.52

Решение:

Ако фиктивно ги пресечеме стаповите AC и BC, точката C ќе биде во рамнотежа само во случајот кога силата F со силите $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$ дава затворен полигон. Бидејќи системот е во рамнотежа, мора и алгебарскиот збир на статичките моменти во однос на било која точка во рамнината на силите да биде еднаков на нула. Моментната точка ја усвојуваме така што елиминираме една од непознатите сили (точката ја усвојуваме на нејзината нападна линија, па бидејќи нема крак, нема ни момент).

а) со примена на моментново правило : од сл.54 се гледа

$\sum M_A = 0$;

$$F \cdot 2,6 - S_2 \cdot 4,1 = 0$$

$$S_2 = \frac{F \cdot 2,6}{4,1} = \frac{50 \cdot 2,6}{4,1} = 31,707kN$$

$\sum M_B = 0$

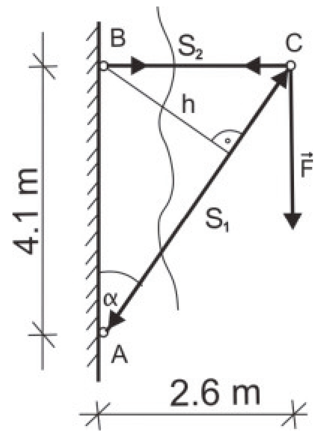
$$F \cdot 2,6 - S_1 \cdot h = 0$$

$$\Delta ABC; \quad tg\alpha = \frac{2,6}{4,1} \qquad \alpha = 32°22\ 50''$$

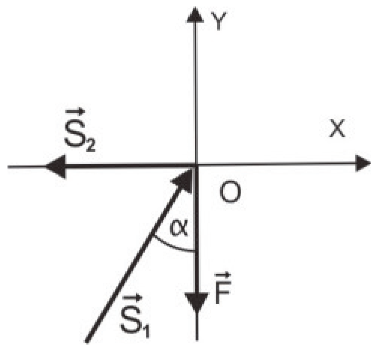
$$\Delta ADB; \quad \sin\alpha = \frac{h}{4,1}$$

$$h = 4,1 \cdot 0,53554 = 2,1957m$$

$$S_1 = \frac{F \cdot 2,6}{h} = \frac{50 \cdot 2,6}{2,1957} = 59,206kN$$



Сл.53



Сл.54

б) по метод на проекции: од сл.55 се гледа:

$\sum Y = 0$; $-F + S_1 \cdot \cos\alpha = 0$

$$S_1 = \frac{F}{\cos\alpha} = \frac{50}{0,8445} = 59,206kN$$

$\sum X = 0$; $-S_2 + S_1 \cdot \sin\alpha = 0$

$$S_2 = S_1 \cdot \sin\alpha$$

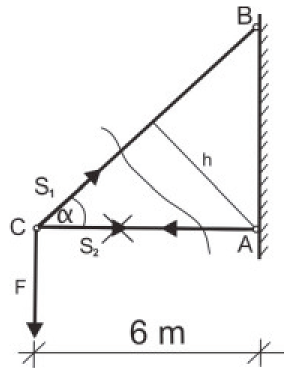
$$S_2 = 59,206 \cdot 0,53554 = 31,707kN$$

Пример 23. *По моментно правило да се определат $\vec{S_1}$ и $\vec{S_2}$ во системот кој е во рамнотежа.*

$AC = 6m$

$F = 12kN$

$S_1 = ?$ $S_2 = ?$



Сл.56

1. АНАЛИТИЧКИ

Услов:

$$\sum M_A = 0$$

$$F \cdot AC - S_1 \cdot h = 0$$

$$S_1 = \frac{F \cdot AC}{h}$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{6}$$

$$h = \sin 42° \cdot 6$$

$$h = 0,66913 \cdot 6 = 4m$$

$$S_1 = \frac{12 \cdot 6}{4} = 18kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F \cdot AC + S_2 \cdot AB = 0$$

$$S_2 = \frac{-F \cdot AC}{AB}$$

$$tg\alpha = \frac{AB}{AC}$$

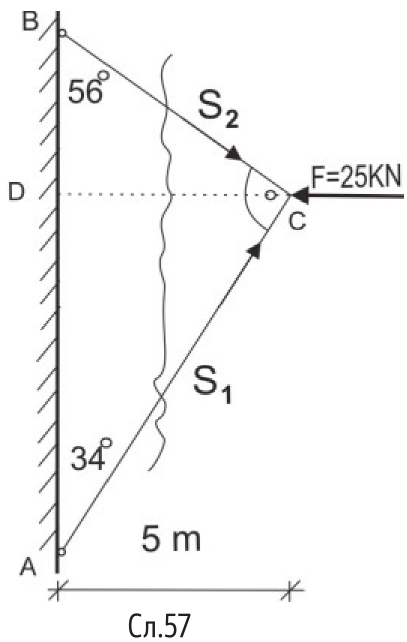
$$AB = tg 42° \cdot AC$$

$$AB = 0,90040 \cdot 6 = 5,4m$$

$$S_2 = \frac{-12 \cdot 6}{5,4} = -13,3kN$$

Напомена: знакот “- “значи дека силата е обратно предпоставена и треба да се изврши корекција на предпоставената насока на сл. 56

Пример 24. *По моментно правило да се определат* $\vec{S}_1$ *и* $\vec{S}_2$ *во системот кој е во рамнотежа.*



Сл.57

1.АНАЛИТИЧКИ

$$\sum M_A = 0$$

$$-F \cdot \overline{AD} + S_2 \cdot \overline{AC} = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F \cdot \overline{BD} - S_1 \cdot \overline{BC} = 0$$

$$tg34^\circ = \frac{5}{\overline{AD}}$$

$$\overline{AD} = 7,42m$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 55,05 + 25 = 80,05$$

$$\overline{AC} = 8,94m$$

$$tg56^\circ = \frac{5}{\overline{BC}} = \frac{5}{3,37} = 1,48$$

$$\overline{BD} = \frac{5}{tg56^\circ} = \frac{5}{1,48} = 3,37m$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 = 11,36 + 25 = 36,36m$$

$$\overline{BC} = 6,02m$$

$$\overline{AB} = 10,79m$$

$$S_1 = \frac{F \cdot \overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{25 \cdot 3,37}{6,02} = \frac{84,25}{6,02} = 13,99kN$$

$$S_2 = \frac{F \cdot \overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{25 \cdot 7,42}{8,94} = \frac{185,5}{8,94} = 20,74kN$$

Пример 25. *Со примена на моментното правило да се определи резултантата на паралелни сили кои дејствуваат на едно круто тело, ако се дадени:* $F_1 = 8,9N$ *;* $F_2 = 20N$ *;* $F_3 = 15,3N;$ $a = 12m$ *,* $b = 8m$ *;* ***a*** *- растојанието меѓу* $\vec{F}_1$ *и* $\vec{F}_2$ *;* ***b*** *- растојанието меѓу* $\vec{F}_2$ *и* $\vec{F}_3$*. Со помош на верижен полигон да се изврши контрола на резултатот.*

Р е ш е н и е

Аналитички:

Моментната точка ја усвојуваме на нападнатата линија на силата $\vec{F}_1$ и ја применуваме теоремата на Варињон:

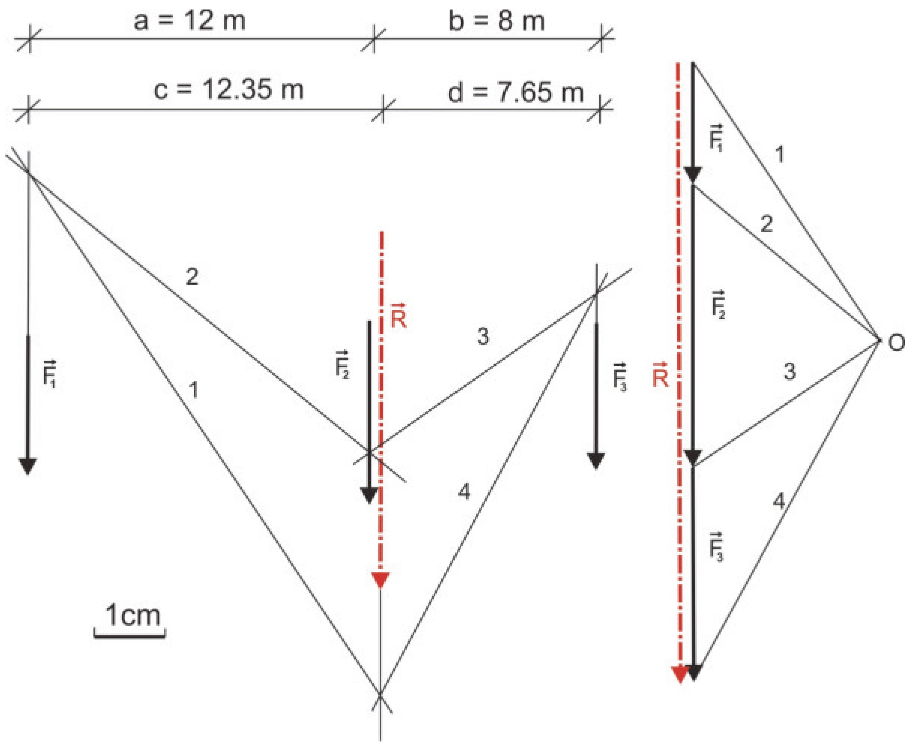
$$R \cdot c = F_2 \cdot a + F_3 \cdot (a+b) \qquad R = F_1 + F_2 + F_3$$

$$c = \frac{F_2 \cdot a + F_3 \cdot (a+b)}{R} \qquad R = 8,9 + 20 + 15,3 = 44,2N$$

$$c = \frac{20 \cdot 12 + 15,3 \cdot (12+8)}{44,2} = 12,353m$$

Графички: (размер: $1cm = 2,5m$; за должина: $1cm = 5N$ за сили)

$$R = 8,8 \cdot 5 = 44N$$
$$c = 4,9 \cdot 2,5 = 12,25m$$



Сл.58

Пример 26. *Со примена на моментното правило да се определат големините и насоките на силите* $\vec{F}_A$ *и* $\vec{F}_B$ *така што дадениот систем на паралелни сили да биде во рамнотежа, сл. 59, ако се дадени:*

$$F_1 = 16kN \; ; \quad F_2 = -18kN \; ; \quad F_3 = 22kN \; ;$$

Р е ш е н и е:

$$\sum M_A = 0$$

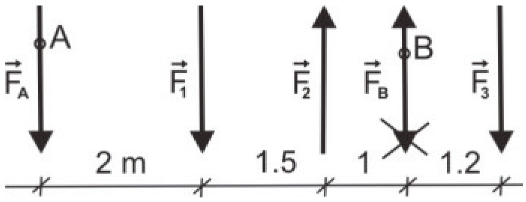
$$F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot (2+1,5) + F_B (2+1,5+1) + F_3 \cdot 5,7 = 0$$

$$F_B = \frac{-16 \cdot 2 - 18 \cdot 3,5 - 22 \cdot 5,7}{4,5} = -20,97N$$

Негативен предзнак значи дека претпоставената насока на силата не е точна, таа сила реално дејствува нагоре.

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_A \cdot 4,5 - F_1 \cdot 2,5 + F_2 \cdot 1 + F_3 \cdot 1,2 = 0$$



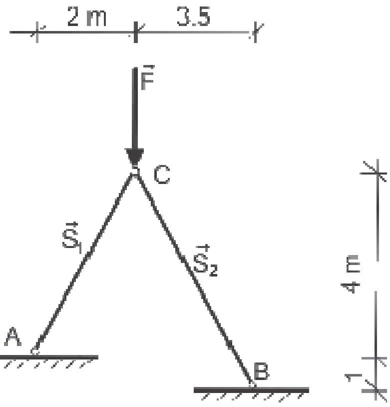
Сл. 59

Контрола:

$$\sum Y = 0$$
$$F_A + F_1 - F_2 - F_B + F_3 = 0$$
$$0,978 + 16 - 18 - 20,978 + 22 = 0$$
$$38,978 = 38,978$$
$$0 = 0$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Пример 27. *Со примена на моментното правило да се определат силите* $\overrightarrow{S_1}$ *и* $\overrightarrow{S_2}$ (сл.60) *ако е дадена силата* $F = 20kN$.

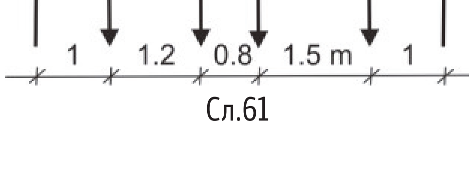


Сл.60

Р е ш е н и е: $S_1 = 13,04kN$

$S_2 = 10,17kN$

Пример 28. Со примена на моментното правило да се определат големините и насоките на силите $\overrightarrow{F_A}$ и $\overrightarrow{F_B}$ така што дадениот систем на паралелни сили да биде во рамнотежа (сл.61), ако се дадени:



Сл.61

$F_1 = -63N$; $F_2 = 91N$; $F_3 = 58N$; $F_4 = -72N$;

Решение: $F_A = -24,228N$; $F_B = 10,228N$.

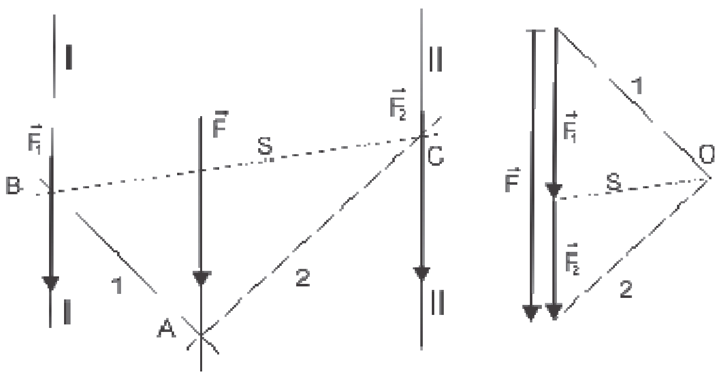
3.3 РАЗЛОЖУВАЊЕ НА СИЛА НА ДВЕ ПАРАЛЕЛНИ КОМПОНЕНТИ

Аналитичко разложување на сили во две паралелни компоненти можно е со примена на моментното правило. Во случај тие компоненти да се сечат, постапката е објаснета во пример бр.22. и 23. Во случај тие компоненти да се паралелни, постапката е објаснета во пример бр.25.

Графичко разложување на силите во две компоненти во случај кога тие компоненти се сечат видовме во пример бр. 12 и бр. 13.

Во ова поглавје ќе се запознаеме со графичко разложување на сили во две компоненти во случај тие компоненти да се паралелни. Тоа е можно само со примена на верижен полигон.

Силата $\vec{F}$ треба да ја разложиме на паралелни компоненти $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ кои се поклопуваат со дадените правци I-I и II-II (Сл.62).



сл.62

Силата $\vec{F}$ ја нанесуваме во погоден размер (план на сили), го усвојуваме произволно полот O и ги повлекуваме зраците 1 и 2. Врз произволната точка A на нападната линија на силата $\vec{F}$ повлекуваме паралели со зракот 1 до точката B и зракот 2 до точката C. Точките B и C ги поврзуваме со линијата S ---- средишницата. Повлекуваме паралела со S низ полот O и со тоа во планот на силите силата F е разложена на компонентите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Кога имаме систем на паралелни сили со произволни насоки, ја разложуваме нивната резултанта. Во статиката многу често се поставуваат вакви задачи, но се искажани со други зборови. Вообичаено е даден систем на паралелни сили со произволни насоки (акции), а се бараат другите две паралелни сили (реакции), кои се во рамнотежа со дадениот систем. Всушност, резултантата на силите (акции) треба да се разложи на две компоненти (реакции), со спротивни насоки, поради рамнотежа на целиот систем на сили.

Да запомниме:

1. **План на силите се црта вообичаено од десната страна од дадениот систем на сили.**

2. **Резултантата во планот на силите е должина меѓу последниот зрак и средишницата со насока од последниот зрак кон средишницата.**

3. **Реакцијата F_B во планот на силите е должина меѓу последниот зрак и средишницата со насока од последниот зрак кон средишницата.**

4. **Реакцијата F_A во планот на силите е должина меѓу средишницата и првиот зрак со насока од средишницата кон првиот зрак.**

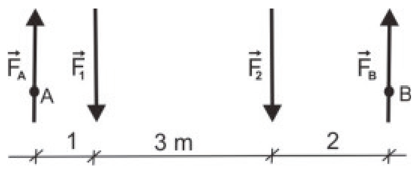
Бидејќи системот е во рамнотежа, резултантата на дадените сили, по големина е еднаква на резултантата на реакциите, но со спротивна насока. Силите се цртаат во размер само на планот на силите.

Во неколку карактеристични примери ќе бидат решени вакви задачи.

Р Е Ш Е Н И   П Р И М Е Р И

Пример 29. *Дадени се паралелни сили* $F_1 = 4,5kN$ *и* $F_1 = 6,0kN$ (сл.63), *да се се најдат две паралелни сили со произволни насоки* F_A *и* F_B *кои со дадените сили* $\vec{F}_1$ *и* $\vec{F}_2$ *ќе бидат во рамнотежа. Контрола на графички добиените резултати да се изврши по аналитички метод.*

Да се најдат две паралелни сили $\vec{F}_A$ *и* $\vec{F}_B$ *кои со дадените сили* $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ *ќе бидат во рамнотежа?*



Сл.63

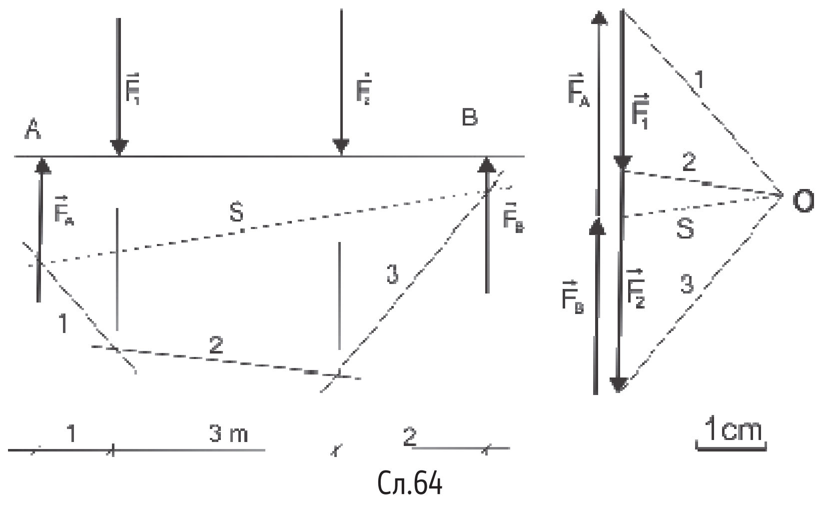
$F_1 = 4,5kN$; $F_2 = 6,0kN$

Р е ш е н и е:

Графички: (размер: $1cm = 1m;$ за должини , $1cm = 2kN;$ за сили)

Од сл. 64 се гледа:

$$F_A = 5,8 \cdot 1 = 5,8kN$$
$$F_B = 4,7 \cdot 1 = 4,7kN$$



Сл.64

Аналитички:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 6 = 0$$

$$F_B = \frac{4,5 \cdot 1 + 6 \cdot 4}{6} = 4,75kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_A \cdot 6 - F_1 \cdot 5 - F_2 \cdot 2 = 0;$$

$$F_A = \frac{45 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{6} = 5,75kN$$

Контрола на аналитички метод:

$$\sum Y = 0$$

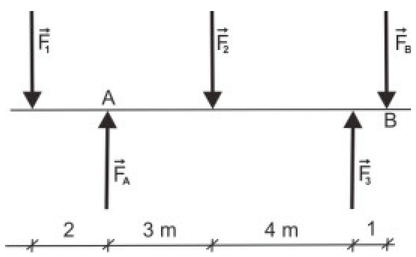
$$F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0;$$

$$5,75 - 4,5 - 6,0 + 4,75 = 0;$$

$$10,5 - 10,5 = 0;$$

$$0 = 0$$

Пример 30. *Графички и аналитички да се определат силите* $\vec{F}_A$ *и* $\vec{F}_B$ *кои го урамножуваат дадениот систем од сили* (сл.65), *ако се* :
$F_1 = 25kN; F_2 = 30kN; F_3 = 35kN$



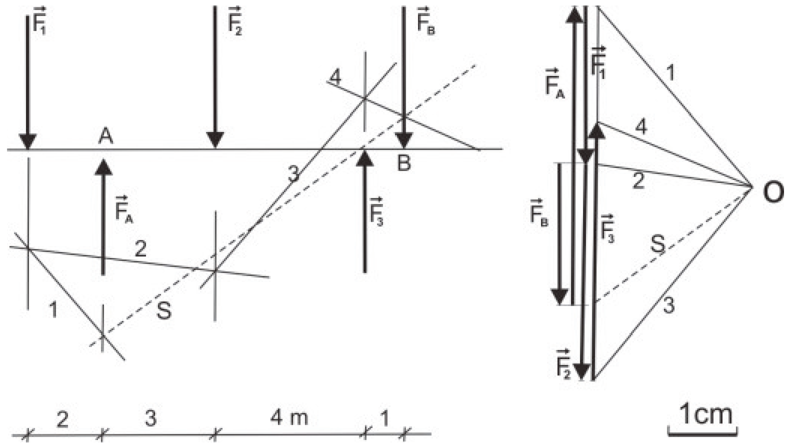
Сл.65

Р е ш е н и е:

Графички: (размер: $1cm = 2m;$; $1cm = 10kN$)

Од сл. 65 се гледа: $F_A = 4,6 \cdot 10 = 46kN$

$$F_A = 2,6 \cdot 10 = 26kN$$



Сл.65

Аналитички:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 3 - F_3 \cdot 7 + F_B \cdot 8 = 0;$$

$$F_B = \frac{25 \cdot 2 - 30 \cdot 3 + 35 \cdot 7}{8} = 25,625kN.$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$- -F_1 \cdot 10 + F_A \cdot 8 - F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 1 = 0;$$

$$F_A = \frac{25 \cdot 10 - 30 \cdot 5 + 35 \cdot 1}{8} = 45,625kN.$$

Контрола:

$$\sum Y = 0;$$

$$-F_1 + F_A - F_2 + F_3 - F_B = 0$$

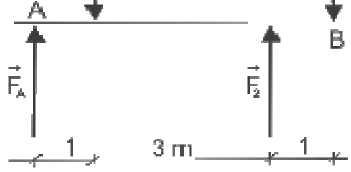
$$-25 + 45,625 - 30 + 35 - 25,625 = 0$$

$$80,625 - 80,625 = 0$$

$$0 = 0$$

Пример 31. *Графички и аналитички да се определат силите* $\vec{F}_A$ *и* $\vec{F}_B$ *кои го урамножуваат дадениот систем од сили* (сл.66), *ако е* :

$F_1 = -F_2 = 10kN$



Сл.66

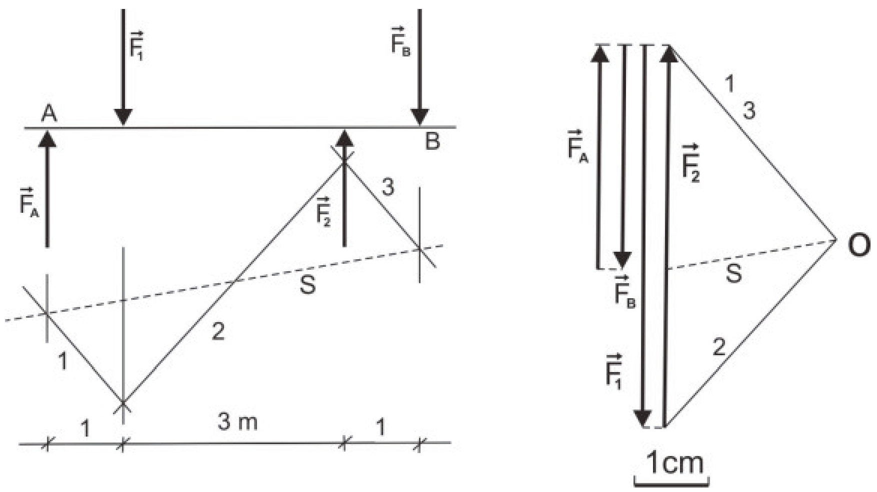
Решение:

Посебен случај на две паралелни сили со спротивни насоки кога тие сили се со иста големина, го нарекуваме **спрега на сили.** Резултантата на спрегата на силите е еднаква на нула, што значи дека телото не се движи транслаторно. Спрегата на сили предизвикува чиста ротација. Статичкото дејство на спрегата на силите го нарекуваме момент на спрегата и тој е еднаков на производ од едната сила и кракот на спрегата (крак на спрегата е меѓусебното најкратко растојание на силите).

Графички: (размер: $1cm = 1m;\ 1cm = 2kN$)

Од сл.67 се гледа:

$$F_A = -6 \cdot 1 = -6kN; \qquad F_B = 6 \cdot 1 = 6kN$$



Сл.67

Аналитички:

$$\sum M_A = 0;$$

$$F_1 \cdot 1 - F_2 \cdot 4 + F_B \cdot 5 = 0$$

$$F_B = \frac{-10 \cdot 1 + 10 \cdot 4}{5} = 6,0kN$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$F_A \cdot 5 - F_1 \cdot 4 + F_2 \cdot 1 = 0$$

$$F_A = \frac{10 \cdot 4 - 10 \cdot 1}{5} = 6kN$$

Контрола:

$\sum Y = 0$;

$$-F_A + F_1 - F_2 + F_B = 0;$$

$$-6 + 10 - 10 + 6 = 0$$

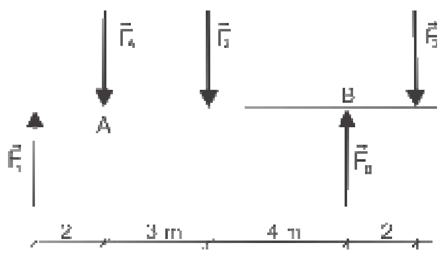
$$16 - 16 = 0$$

$$0 = 0$$

Забелешка: Во нашиот пример на негативната спрега M_1 ($M_1 = -10 \cdot 3 = -30kNm$) се спротиставува позитивната спрега M_2 ($M_2 = 6 \cdot 5 = 30kNm$), па вкупниот систем на сили е во рамнотежа.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Пример 32. *Графички и аналитички да се определат силите* $\vec{F}_A$ *и* $\vec{F}_B$ *кои го урамножуваат дадениот систем од сили* (сл.68), *ако се* :
$F_1 = 8kN; F_2 = 12kN; F_3 = 6kN$



Сл.68

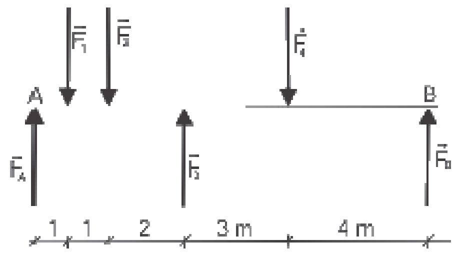
Решение:

$$F_A = 5{,}143kN$$

$$F_B = 15{,}143kN.$$

Пример 33. *Графички и аналитички да се определат силите* $\vec{F}_A$ *и* $\vec{F}_B$ *кои го урамножуваат дадениот систем од сили* (сл.69), *ако се* :

$$F_1 = 52kN; F_2 = 84kN; F_3 = 66kN; F_4 = 73kN.$$



Сл.69

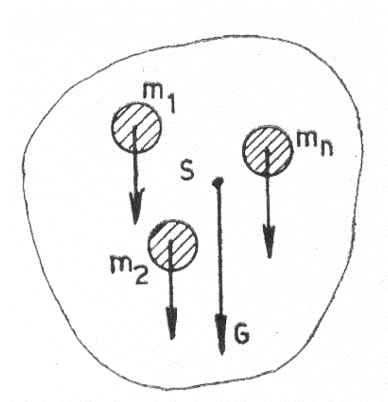
Решение:

$$F_A = 100,55kN$$

$$F_B = 42,45kN.$$

4. ТЕЖИШТЕ

Материјалното тело може да се замисли дека е составено од елементарни честици со маси $m_1, m_2 ..., m_n$ на кои дејствува силата на гравитацијата, (сл. 69).



Сл. 69

Производите од масите (m) и забрзувањето на земјината тежа (g) претставуваат тежини. Тие се паралелни сили со насока вертикално надолу, кон центарот на Земјата. Резултантата на тие паралелни сили претставува вкупна тежина на материјалното тело:

$$G = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g + ... + m_n \cdot g$$
$$G = g(m_1 + m_2 + ... + m_n) = M \cdot g$$

G - тежина на телото

M - вкупната маса на телото

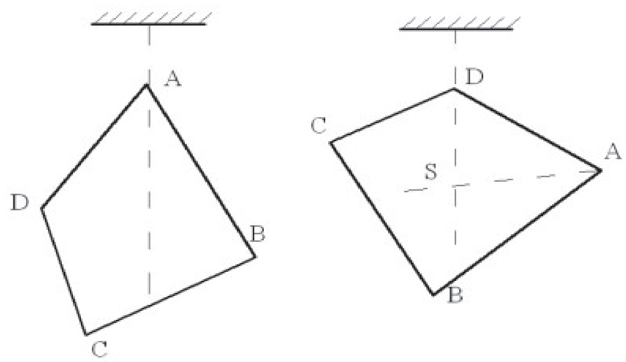
g - гравитација

Нападната точка на резултантата на паралелните сили кои претставуваат тежини на елементарните делови од телото се вика **тежиште** *на телото.*

Секоја линија која поминува низ тежиштето се вика **тежишна линија**. Тежиштето може да се определи со пресек на барем две тежишни линии.

Ако некое материјално тело го потпреме во тежиштето, тоа ќе остане во мирување во секоја положба (индиферентна рамнотежа). Сите овие заклучоци се однесуваат на хомогените тела (тела кои по целата зафатнина имаат иста специфична маса).

Наједноставен начин за определување на тежиштето е по пат на експеримент: хомогена материјална плоча да се обеси наизменично во две точки и да се остави слободно да виси, (сл. 70). Во двата случаи, да обележиме вертикални линии низ точките за кои телото е обесено. Пресекот на овие две линии го претставува тежиштето, а овие линии ги нарекуваме тежишни линии.



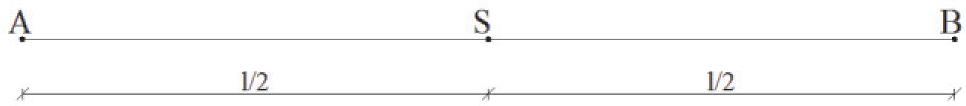
Сл. 70

Во статиката тежиштето може да се определи по *аналитички и графички метод*. Двете методи се базираат на спомнатата експериментална постапка, но телото не го вртиме, туку претпоставуваме дека гравитационите сили дејствуваат во два различни правци, вообичаено меѓусебе нормални. Ние ќе се задржиме на аналитичката метода.

Тука ќе го запознаеме определувањето на тежиштето на материјалните линии и плоштини.

4.1 ТЕЖИШТЕ НА МАТЕРИЈАЛНИ ЛИНИИ

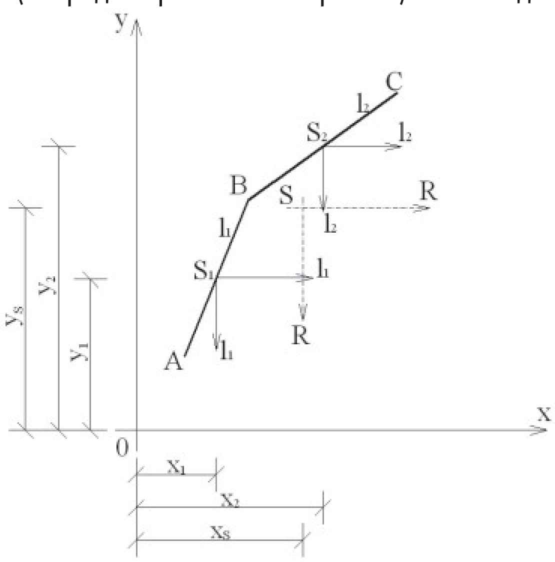
Материјална линија е тело на кое двете димензии (ширината и висината) се занемарливо мали во однос на третата (должината). Најпроста материјална линија е отсечка. Тежиштето на отсечката е во нејзината средина. Во случај да ја обесиме материјалната линија AB во точката S, таа ќе биде во рамнотежа.



Сл.71

Тежиштето на сложена линија може да се определи по аналитички и графички метод. Постапката при определување на тежиштето на сложена линија се сведува на нејзина поделба на составни делови за кои се знае тежиштето. Според графичкиот метод тежиштето на сложена линија се определува со помош на план на сили и верижен полигон.

По аналитички метод, тежиштето се определува со примена на моментно правило. На сликата 71 е претставена сложена материјална линија за која треба да се определи тежиштето по аналитички метод. Усвојуваме координатен систем и ги определуваме координатите на тежиштата S_1 и S_2. Должината на дадените отсетчки ги замислуваме како сили кои дејствуваат во средишните точки на отсечките, односно во тежиштата S_1 и S_2 Ја поставуваме моментната равенка во однос на точката O (според теоремата на Варињон) па ќе биде:



Сл.72

$$R \cdot x_S = l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 ; \quad R = l_1 + l_2$$

$$x_S = \frac{l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2}{l_1 + l_2}$$

$$y_S = \frac{l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2}{l_1 + l_2}$$

За сложените линии составени од повеќе елементарни отсечки постапката за определување на тежиштето е иста, па равенката за аналитичко определување на координатите на тежиштето може да се напише со општа скратена формула:

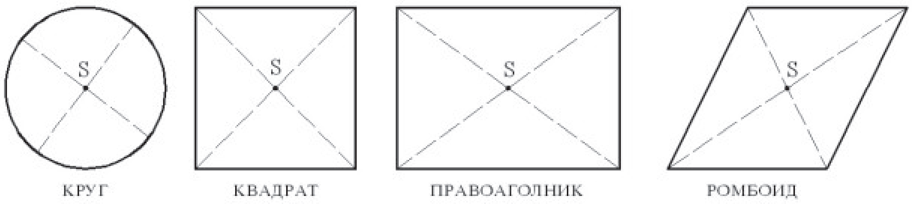
$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} l_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} l_i} ; \quad y_S = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} l_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} l_i}$$

4.2 ТЕЖИШТЕ НА МАТЕРИЈАЛНИ ПЛОШТИНИ

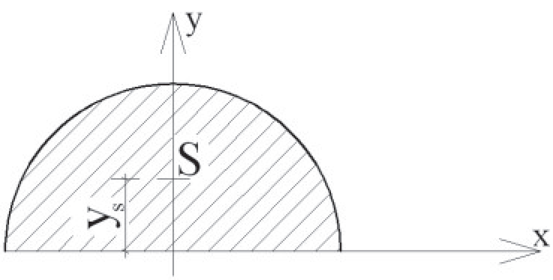
Материјална плоштина е тело на кое едната димензија (висината) е многу помала во однос на другите две (должината и ширината).

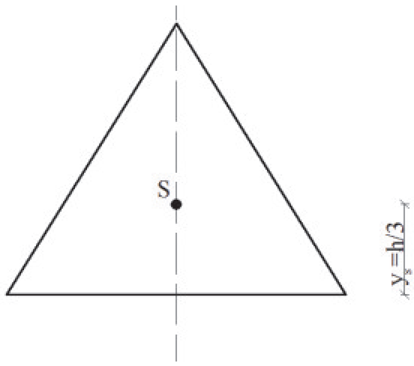
Плоштините ги сметаме за фиктивни сили, паралелни меѓу себе, па ја бараме нападната точка на резултантата на паралелните сили.

Најпрвин се одредува тежиштето на правилните геометриски плоштини кои имаат најмалку две оски на симетрија. Пресекот на тие оски се поклопува со нивното тежиште. (сл. 73).



Сл.73





$$y_S = \frac{4R}{3\pi} \qquad\qquad y_s = \frac{h}{3}$$

Сл.74

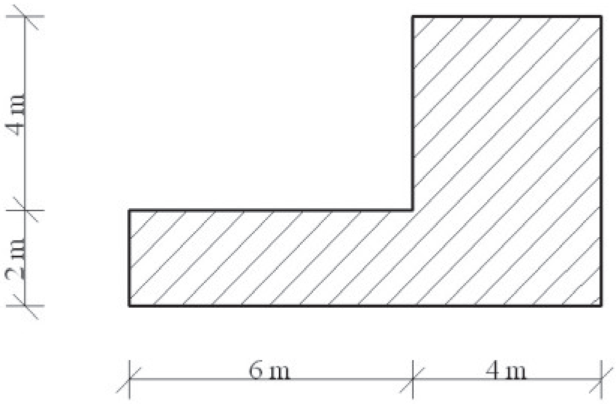
По аналитички пат тежиштето на материјална плоштина се определува со примена на моментно правило. За таа цел усвојуваме координатен систем и ги определуваме тежиштата на одделните плоштини. Ја поставуваме моментната равенка во однос на координатниот почеток “0“, (според теоремата на Варињон).

Сложените плоштини се делат на прости плоштини чии тежишта лесно се определуваат. Овие прости плоштини ги сметаме за фиктивни сили и ја бараме нападната точка на резултантата на паралелните сили.

За плоштини со една оска на симетрија тежиштето мора да лежи на оската на симетрија.

РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

Пример бр.34 Аналитички да се определи тежиштето на дадената сложена плоштина (сл. 75)



Решение:

$$x_S = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2}$$

$$y_S = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2}$$

Сл.75

Според сл. 75 и поставениот координатен систем ќе биде:

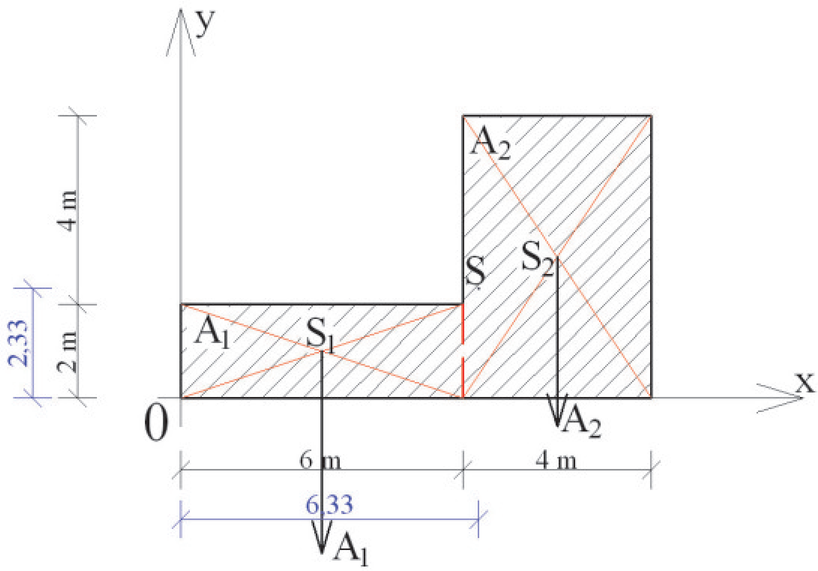
$A_1 = 2 \cdot 6 = 12m^2$; $x_1 = 3m$; $y_1 = 1m$

$A_2 = 4(2+4) = 24m^2$; $x_2 = 6+2 = 8m$; $y_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3m$

$$x_S = \frac{12 \cdot 3 + 24 \cdot 8}{12 + 24} = 6{,}33m$$

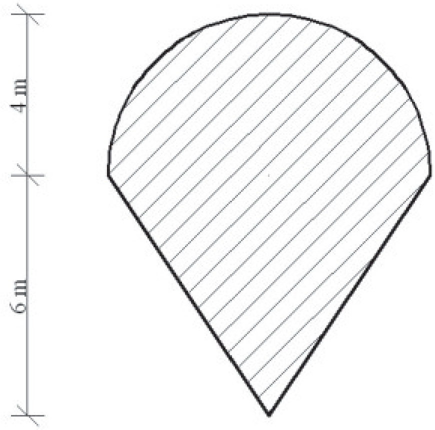
$$S(6{,}33; 2{,}33)$$

$$y_S = \frac{12 \cdot 1 + 24 \cdot 3}{12 + 24} = 2{,}33m$$



Сл.76

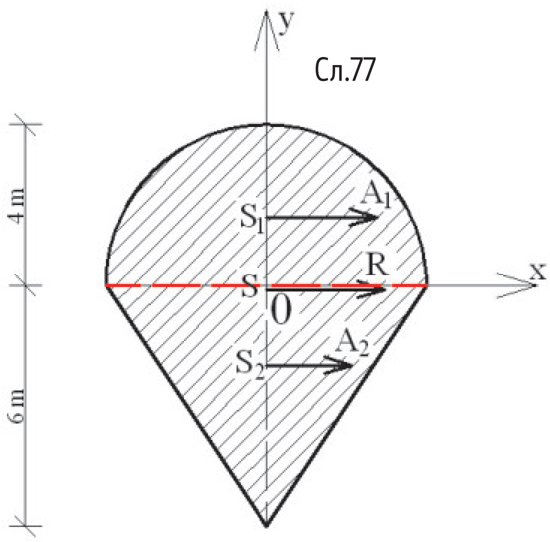
Пример бр.35: Аналитички да се определи тежиштето на дадената сложена плоштина (сл. 77)



Сл. 77

Решение:

Кога треба да се определи тежиштето на симетрична плоштина во однос на една од координатните оски, треба да се бара само една од координатите, бидејќи втората координата се поклопува со оската на симетрија. Во нашиот пример оската на симетрија на дадената плоштина се поклопува со y-оската на координатниот систем, што значи дека не мора да се определува x_s, бидејќи е $x_S = 0$.



$$A_1 = \frac{R^2 \cdot \pi}{2} = \frac{4^2 \cdot \pi}{2} = 25{,}1327 m^2$$

$$y_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot \pi} = 1{,}69765 m$$

$$A_2 = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 m^2$$

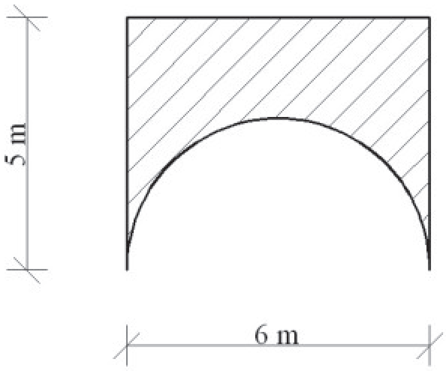
$$y_2 = -\frac{6}{3} = -2m$$

$$y_S = \frac{25{,}1327 \cdot 1{,}69765 + 24 \cdot (-2)}{25{,}1327 + 24}$$

$$y_S = -0{,}10856 m; \qquad x_S = 0$$

Сл. 78

Пример бр.36: Аналитички да се определи тежиштето на дадената сложена плоштина (сл. 79)

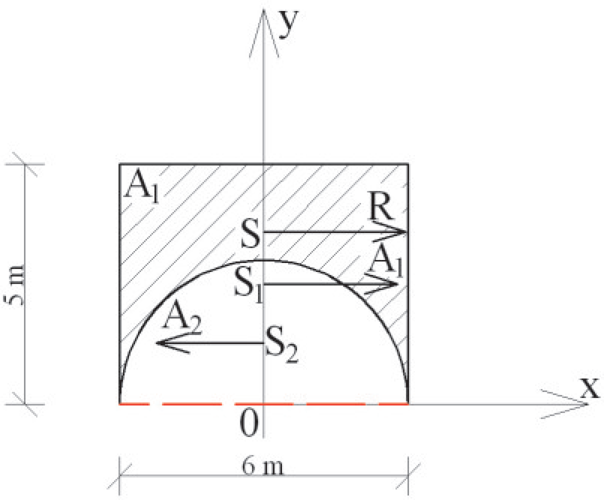


Сл.79

Решение:

Сложените рамни плоштини на кои им се одземени извесни делови, може да се третираат како ослабени плоштини. Во таков случај при определување на тежиштето одземените делови се третираат како сили кои имаат спротивна насока од другите.

Според Сл.80 и поставениот координатен систем, ќе биде:



Сл.80

$$A_1 = 6 \cdot 5 = 30m^2;\ \ y_1 = 2{,}5m$$

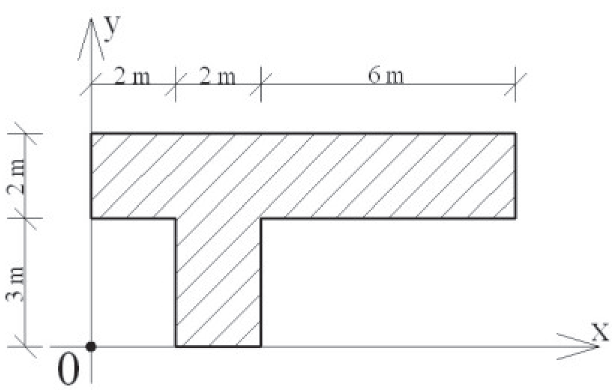
$$A_2 = \frac{R^2 \cdot \pi}{2} = \frac{3^2 \cdot \pi}{2} = 14{,}137m^2;$$

$$y_2 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 3}{3\pi} = 1{,}273m$$

$$y_S = \frac{30 \cdot 2{,}5 - 14{,}137 \cdot 1{,}273}{30 - 14{,}137} = 3{,}5935m$$

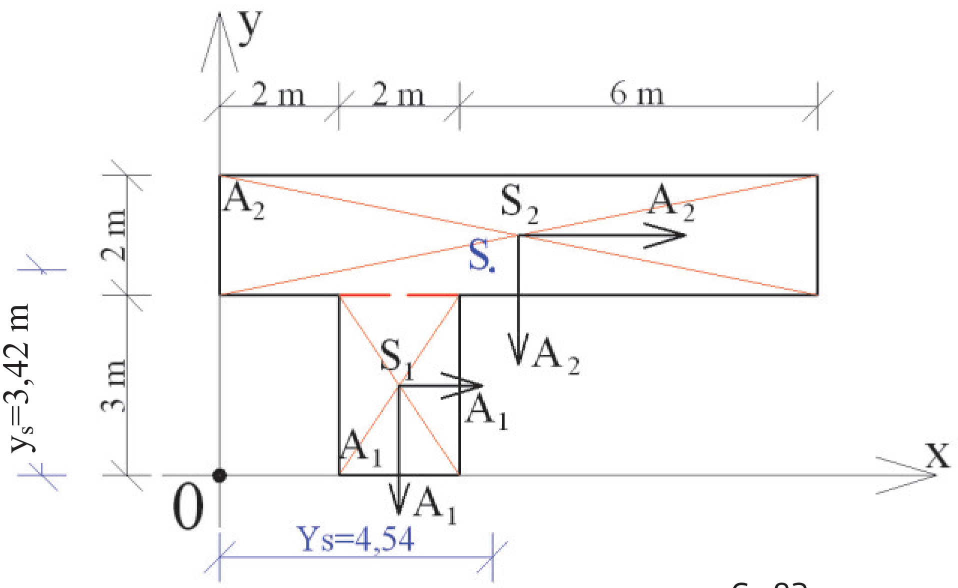
$$S(0;3{,}5935)$$

Пример бр.37: Аналитички да се определи тежиштето на дадената сложена плоштина (сл. 81)



Сл.81

Решение:



Сл.82

$A_1 = 2 \cdot 3 = 6m^2$; $y_1 = 1{,}5m$; $x_1 = 3{,}0m$

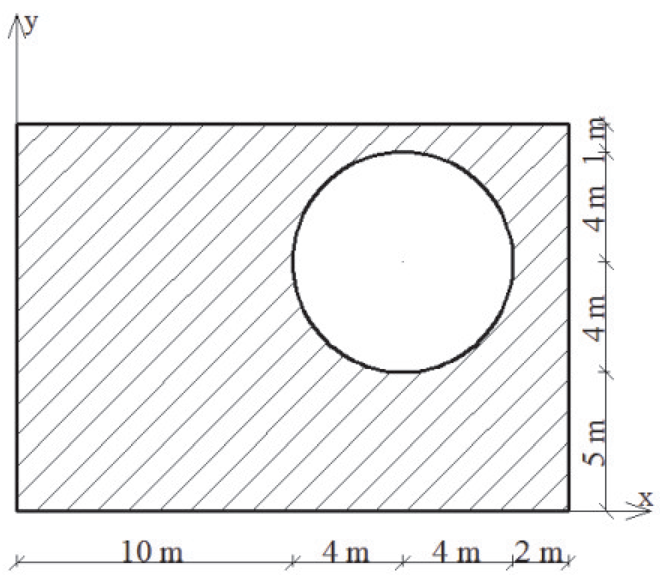
$A_2 = 10 \cdot 2 = 20m^2$; $y_2 = 4{,}0m$; $x_2 = 5{,}0m$

$$x_S = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{6 \cdot 3 + 20 \cdot 5}{6 + 20} = 4{,}54m$$

$$y_S = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{6 \cdot 1{,}5 + 20 \cdot 4{,}0}{6 + 20} = 3{,}42m$$

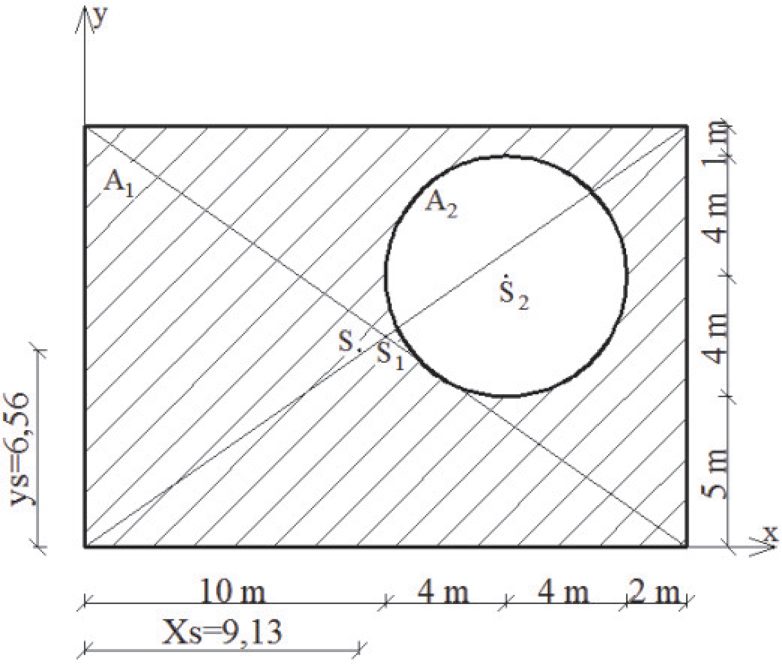
$S(4{,}54; 3{,}42)$

Пример бр.38: Аналитички да се определи тежиштето на дадената сложена плоштина (сл. 83)



Сл. 83

Решение:



Сл. 84

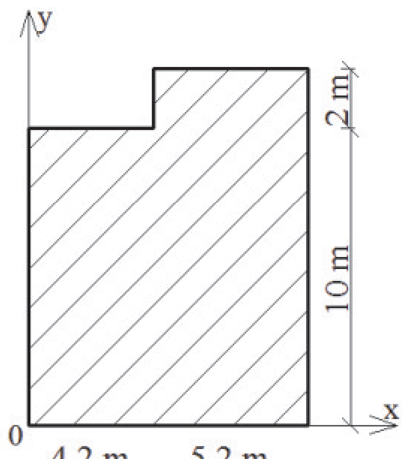
$$A_1 = 20 \cdot 14 = 280m^2; \qquad x_1 = 10{,}0m; \quad y_1 = 7{,}0m$$

$$A_2 = R^2 \cdot \pi = 4^2 \cdot \pi = 50{,}24m^2; x_2 = 14{,}0m; \quad y_2 = 9{,}0m$$

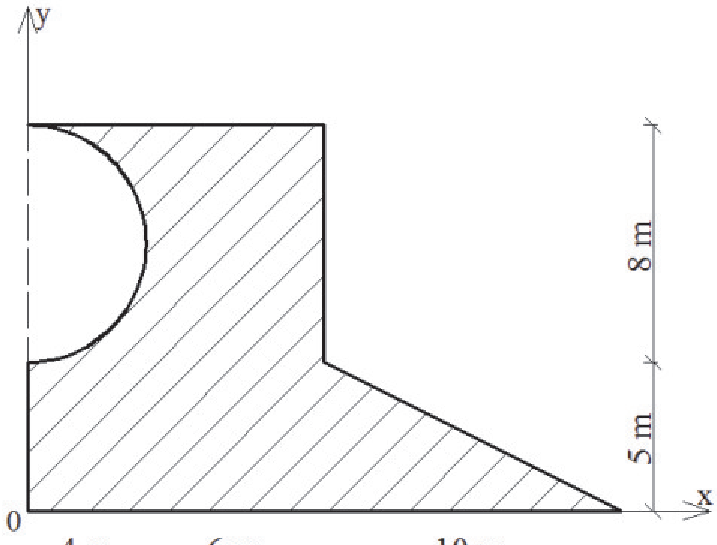
$$x_S = \frac{A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2}{A_1 - A_2} = \frac{280 \cdot 10 - 50{,}24 \cdot 14}{280 - 50{,}24} = 9{,}13m$$

$$y_S = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2} = \frac{280 \cdot 7 - 50{,}24 \cdot 9}{280 - 50{,}24} = 6{,}56m$$

З А Д А Ч И   З А   В Е Ж Б А Њ Е



Сл. 85



Сл. 86

Решение:

За задачата од Сл. 85

$$x_s = 4{,}08\,m$$

$$y_s = 5{,}06\,m$$

За задачата од Сл. 86

$$x_s = 5{,}31\,m$$

$$y_s = 5{,}09\,m$$

Запомни:

Тежиште е точка во која е концентрирана целата тежина на едно материјално тело. Може да се определи аналитички и графички.

Прашања за самооценување:

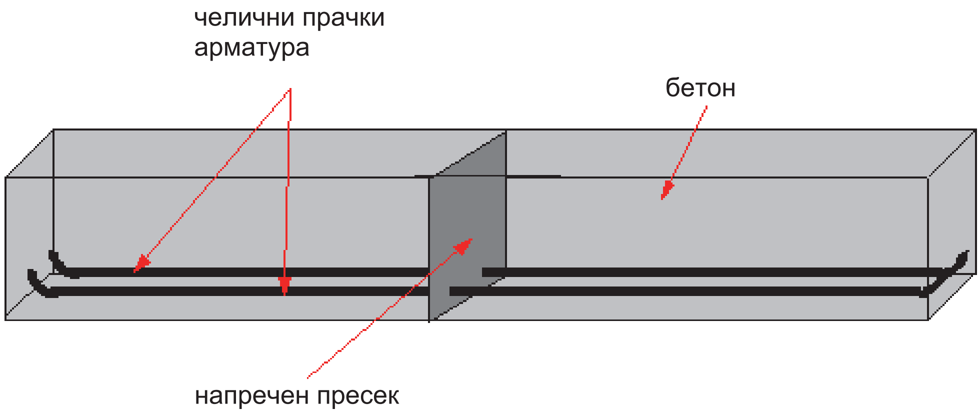
1. Дефинирај тежиште!
2. За кои плоштини велиме дека се сложени?
3. Колку методи можеме да користеме за пресметување тежиште?

5. ПОЛНИ РАМНИ НОСАЧИ

Градежните објекти, во статичка смисла, се составени од конструктивни елементи кои примаат и пренесуваат оптоварувања. Овие елементи ги нарекуваме **носачи**. Носачите можат да бидат *рамни и просторни.* Рамните носачи имаат конструктивен облик кој заедно со правците на силите кои дејствуваат врз него, лежат во една рамнина, а носачот е бескрајно тенка крута плоча во истата рамнина. Тука важи претпоставката дека материјална плоча е недофрмабилна, односно дека е едно идеално круто тело.

Рамните носачи може да бидат **полни и решеткасти**.

Полн рамен носач е носач чиј напречен пресек е исполнета со материја која учествува во носењето на товарите.

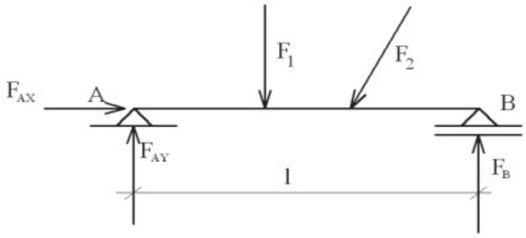


Сл.87

Решеткаст носач е носач составен од стапови кои меѓусебно се поврзани така што претставуваат една целина (види слика 88)

Сл.88

Полните рамни носачи шематски ги претставуваме како права линија која се поклопува со надолжната оска на носачот.



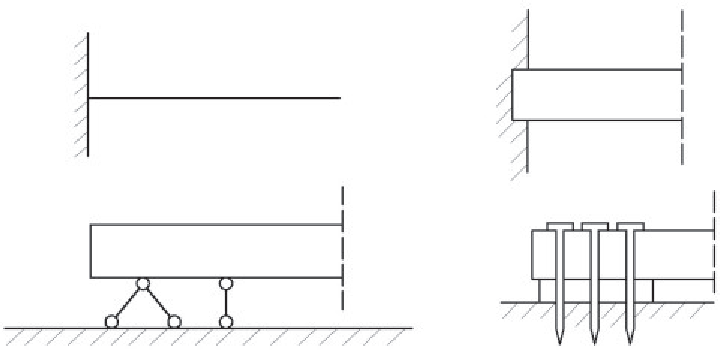
Сл.89

Допирните точки меѓу носачите или меѓу носачот и почвата, кои оневозможуваат некои од компоненталните движења или наполно го спречуваат движењето на носачот и неговите делови се: **врски, лежишта** или **потпирачи.**

Со потпирањето носачите во лежиштата пренесуваат сили, кои дејствуваат како активни сили. Во лежиштата овие активни сили предизвикуваат отпори, односно реакции (пасивни сили). Активните и пасивните сили се во рамнотежа, односно имаат ист правец и интензитет, а спротивни насоки. Од конструкцијата на лежиштето зависи какви реакции ќе се јават во него.

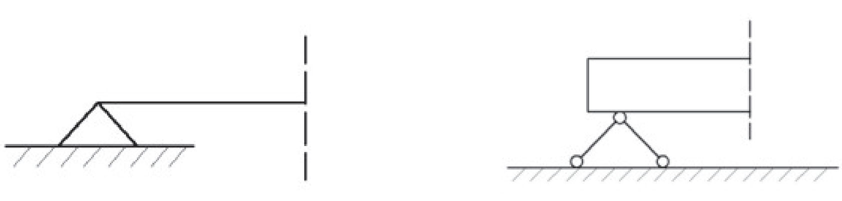
5.1 ВИДОВИ ЛЕЖИШТА, НОСАЧИ, ОПТОВАРУВАЊА И ВНАТРЕШНИ СИЛИ

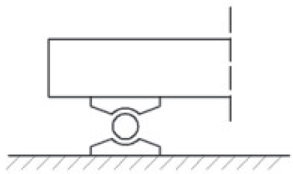
За општиот вид оптоварувања, слободниот носач има можности на хоризонтално, вертикално и ротационо движење. Кога со врска се оневозможени сите три вида движења имаме **вклештено лежиште,** (види слика бр.90).



Сл.90

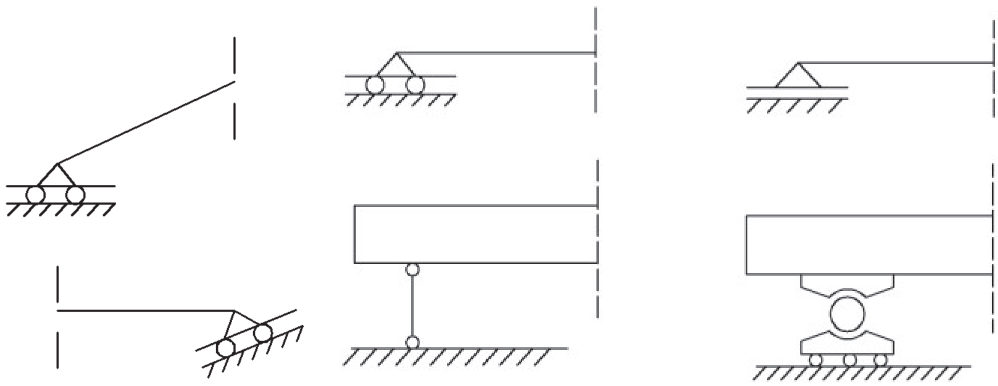
Кога врската оневозможува хоризонтално и вертикално движење на носачот, но ротација е можна, имаме **неподвижно лежиште,** (види слика 91).





Сл.91

Подвижно лежиште се конструира така што овозможува поместување на носачот во дадеден правец (види слика 92). Самата конструкција на подвижно лежиште може да се изведе со цилиндрични валјаци кои можат да се движат најчесто во правец на оската на носачот, без триење.



Сл.92

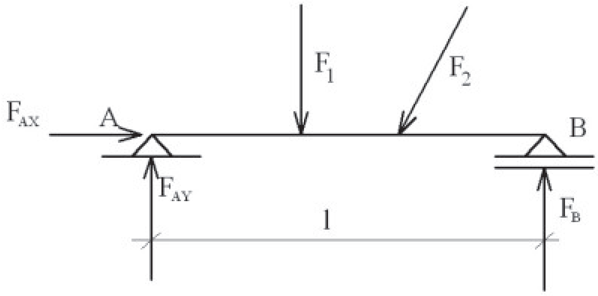
Под влијание на оптоварувања, во статиката носачот мора да биде во рамнотежа. Тоа значи дека оптоварувањата и реакциите во лежиштата заедно сочинуваат систем на сили кои мораат да бидат во рамнотежа. Непознатите реакции во лежиштата ги определуваме со помош на познатите аналитички или графички услови за рамнотежа на сили во рамнина.

Од бројот и видот на лежиштата врз кои е потпрен еден носач зависи и бројот на непознатите реакции. Кога кај еден рамен носач на кого дејствуваат надворешни сили можеме да ги определиме непознатите реакции со помош на трите услови за рамнотежа ($\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M = 0$), велиме дека е тоа статички надворешен **определен носач.**

Во практиката многу често се среќаваме со носачи кои имаат повеќе непознати реакции во своите лежишта и истите не можеме да ги определиме само со помош на трите услови за рамнотежа. Тоа се статички надворешно **неопределени носачи.** Вакви носачи се решаваат со помош на равенки коишто ќе ги проучиме во јакост на материјалите, додека тука во статиката ќе ги анализираме само статичките надворешно определени носачи.

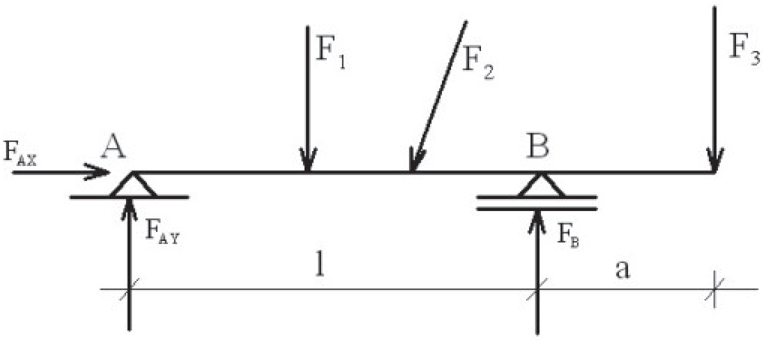
Во зависност од положбата и видот на лежиштата кои се применети, полните рамни носачи можат да бидат: *проста греда, греда со еден или два пропуста, герберова греда, конзола и рамка.* Сите спомнати полни рамни носачи се т.н. *гредасти носачи.* Постојат и полни лачни носачи, кои нема да ги изучуваме.

Проста греда е носач со две лежишта од кои едното е подвижно, а другото е неподвижно. Шематски ја претставуваме како права линија која се поклопува со надолжната оска на носачот.

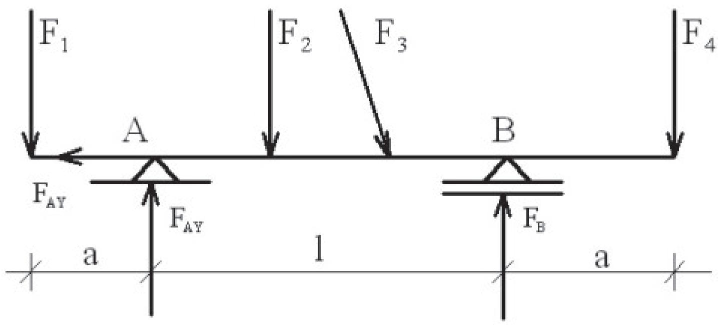


Сл.93

Носачот потпрен на две лежишта, од кои едното е подвижно, а другото неподвижно, чии краишта се продолжени преку една или две потпори (лежишта), го нарекуваме **греда со препусти.**

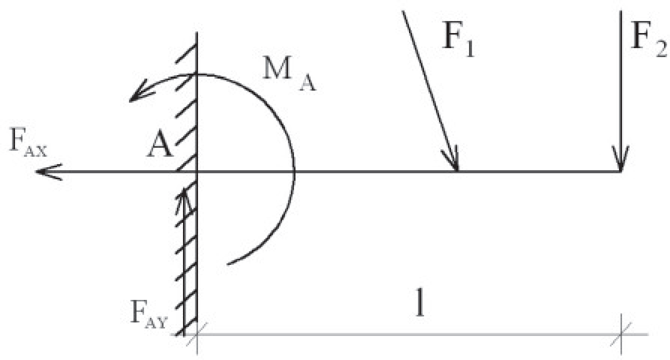


Сл.94



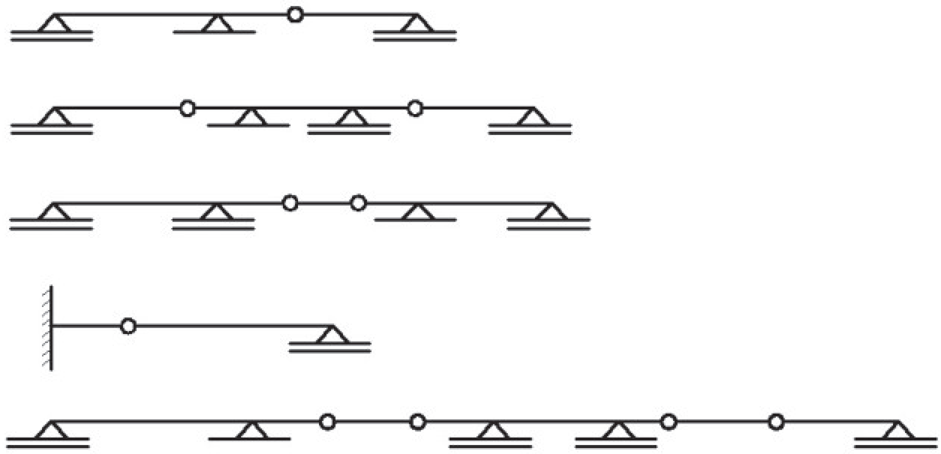
Сл.95

Носачот вклештен на едниот крај, а на другиот слободен, го нарекуваме **конзола.**



Сл.96

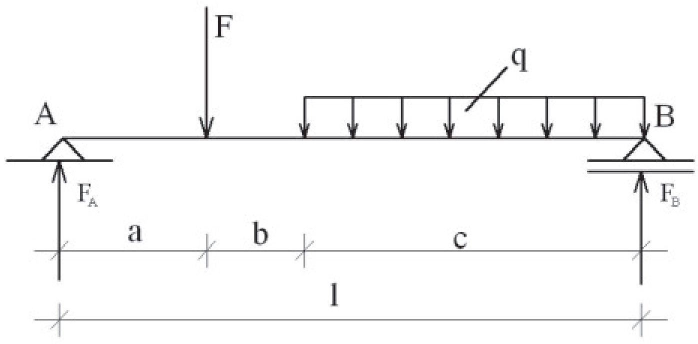
Сложена греда која може да биде составена од прости греди, греди со препусти и конзоли меѓусебно врзани со зглобови се нарекува **герберова греда**. Разликуваме герберови греди со два, три или повеќе распони.



Сл.97

Основна задача на носачите е да ги прими и пренесе оптоварувањата. Под оптоварување се подразбираат сите видови сили кои предизвикуваат реакции во потпорите.

Според начинот на дејствувањето, оптоварувањето е **концентрирано** и **рамномерно распределено** (континуирано). Концентрираното оптоварување дејствува во една точка на носачот, се обележува со F и има димензии N (њутни). Рамномерното или континуирано оптоварување дејствува по должина на носачот, се обележува со q и има димензии $N/_m$. Континуираното оптоварување може да биде рамномерно или нерамномерно поделено.

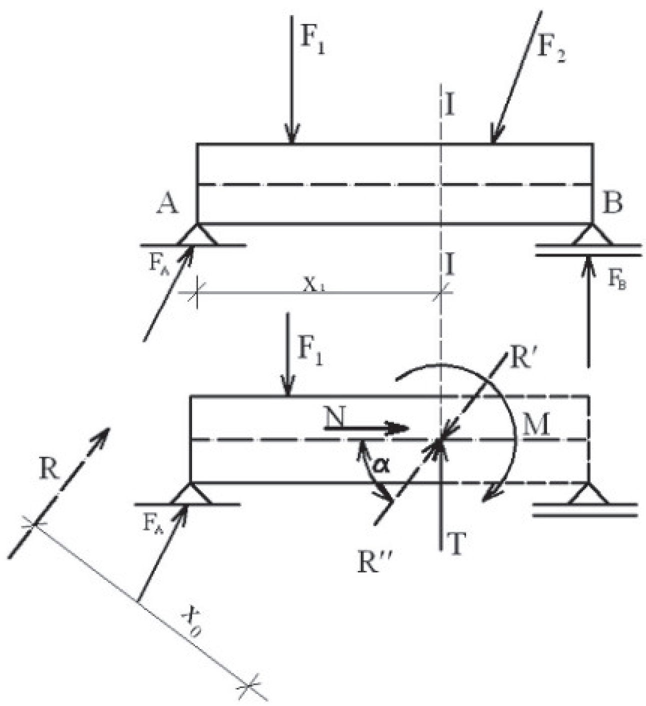


Сл.98

Кога оптоварувањето на еден носач има влијание и на друг носач, велиме за другиот носач дека е посредно оптоварен. Кога оптоварувањето ја менува својата нападна точка, велиме дека е подвижно. Со посредно и подвижно оптоварување нема да се запознаваме.

Оптоварувањето како надворешна сила предизвикува реакции во лежиштата на носачот. Сите овие сили (акции и реакции) треба да се во рамнотежа. Со самото пренесување на надворешните сили во лежиштата, носачот е во напрегната состојба, т.е. во него се јавуваат внатрешни сили. Целта на статичката пресметка на набљудуваниот носач е да се изврши анализа на сите видови напрегања кои се предизвикани од надворешни сили (во овој термин влегуваат и реакциите), и да се провери дали се во граници на дозволените, за да се запази стабилноста на конструкцијата. За пресметка на овие напрегања (кои ќе ги запазиме во јакост на материјалите), неопходно е да ги знаеме внатрешните сили во напрегнатиот носач.

За полесно разбирање на поимот и видот на внатрешните сили, набљудуваме произволен носач, привидно пресечен во пресек $I-I$.



Сл.99

Пресекот $I-I$ е на растојание x од потпората (лежиштето) A. Бидејќи носачот е како целина во рамнотежа, секој негов дел мора да е во рамнотежа. Го отстрануваме десниот дел од пресекот на носачот и ја набљудуваме рамнотежата на левиот дел. Силата F_1 и реакцијата F_A ги сложуваме во резултантата R на растојанието x_0 (тоа е резултантата на надворешните сили кои дејствуваат на левиот дел од носачот). Во пресекот $I-I$ додадовме две еднакви сили R' и R'' со спротивни насоки, а по големина и правец како R, со што не се менува рамнотежата (шеста аксиома). Резултантата R и силата R' предизвикуваат спрега во пресекот $I-I$ со интензитет:

$$M = R \quad x_0$$

Во пресекот останува уште силата R'' која ја разложуваме на компонентите

T и N

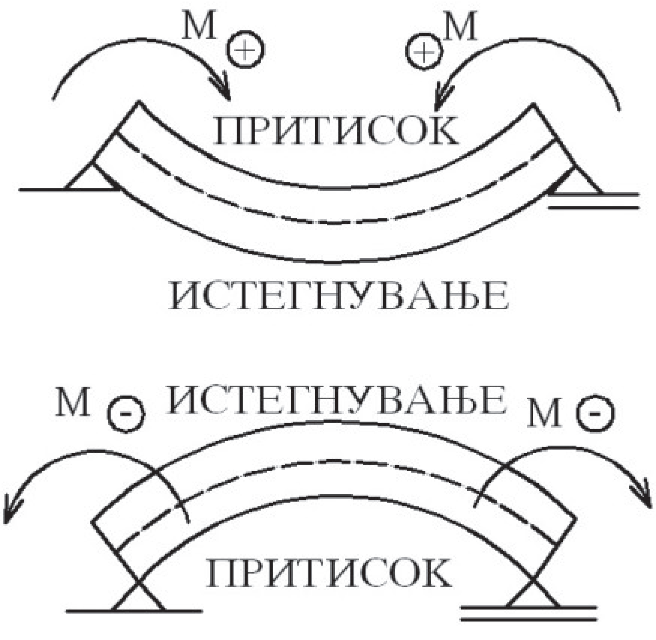
Хоризонталната компонента од силата R'' е $N:(R''=R)$

$$N = R \cdot \cos\alpha$$

Вертикалната компонента од силата R'' е T:

$$T = R \cdot \sin\alpha$$

Овие три влијанија на резултантата R во пресекот $I-I$ посебно подетално ќе ги запознаеме. Изразот (26) претставува статички момент на резултантата во пресекот $I-I$, а го нарекуваме **нападен момент**. Нападниот момент сметаме дека е позитивен (+) ако со своето влијание ги притиска горните влакна на носачот, а долните ги истегнува (сл. 99). Кога дејствува обратно, долните влакна на носачот ги притиска, а горните ги истегнува, сметаме дека има негативна (-) насока.



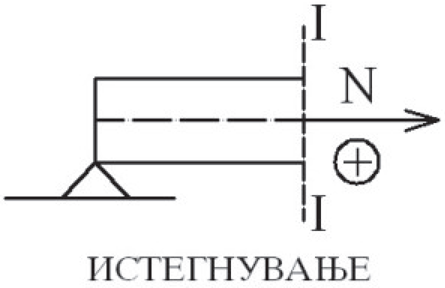
Сл.100

Горното може да се каже и со други зборови, и тоа: моментот е позитивен ако истиот врти во однос на пресекот во насока на стрелката од часовникот, ако силата е лево од пресекот, односно негативен ако врти обратно од стрелката на часовникот, кога силата е десно од пресекот.

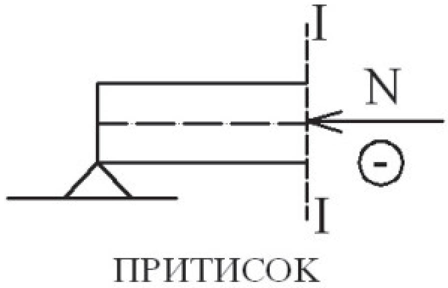
Дефиницијата за нападниот момент гласи:

Нападен момент во произволен пресек од носачот е еднаков на алгебарскиот збир на статичките моменти на сите надворешни сили лево (или десно) од набљудуваниот пресек, во однос на тежиштето од истиот пресек, како моментна точка.

Изразот (27) претставува **аксијална сила** која дејствува во правец на оската на носачот, односно нормално на набљудуваниот напречен пресек. Во однос на делот од носачот кој го набљудуваме, оваа сила може да дејствува како притисок или истегнување (сл. 102). Кога нормалната сила дејствува во насока кон надвор од пресекот, предизвикува затегнување и сметаме дека има позитивна насока. Кога нормалната сила дејствува спрема пресекот, предизвикува притисок и сметаме дека е негативна.



Сл.101

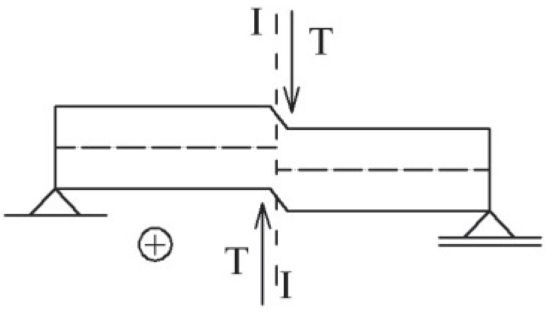


Сл.102

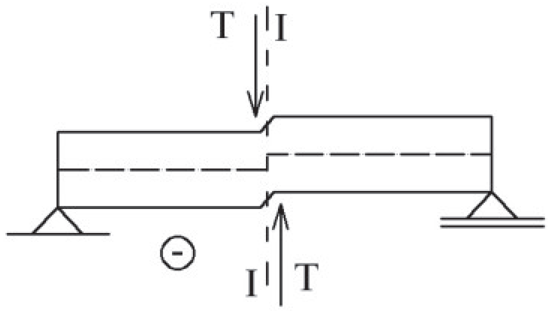
Дефиницијата за аксијалната сила гласи:

Аксијалната сила во произволен пресек на набљудуваниот носач е еднаква на алгебарскиот збир на сите надворешни сили, лево (или десно) од пресекот, кои дејствуваат во правецот на оската на носачот.

Изразот (28) претставува напречна или **трансверзална сила** која дејствува под прав агол во однос на оската на носачот. Трансверзалната сила има позитивна насока кога левиот дел од носачот од произволно набљудуваниот пресек, настојува да се помести нагоре, а десниот надолу (сл. 103). Кога трансверзалната сила настојува делот од носачот десно од пресекот да го помести нагоре, а левиот надолу, има негативен прѕедзнак.



Сл.103



Сл.104

Дефиницијата за трансврзална сила гласи:

Трансверзалната сила во произволен напречен пресек на набљудуваниот носач е еднаква на алгебарскиот збир на сите сили нормални на оската на носачот, лево или (десно) од пресекот.

Врз основа на овие дефиниции за нападен момент, аксијална и трансверзална сила, во можност сме да ги определеме тие статички големини за разни пресеци на набљудуваниот носач. Пресеците ги усвојуваме во карактеристични точки и добиените статички големини во погоден размер графички ги претставуваме. Со поврзувањето на сите точки, добиваме графичка претстава на променливоста на статичките големини по должината на носачот. Тоа се статички дијаграми. Можат да се определат по аналитички и графички пат. Ние ќе се задржиме на аналитичкото определување и тоа за разни видови носачи.

Запомни:

Полн рамен носач е носач кај кој секој негов напречен пресек е исполнет со материја која учествува во носењето на товарите.

При општ вид на оптоварување, рамниот носач има можност за хоризонтално, вертикално и ротационо движење.

Врската на носачот со другите елементи може да се оствари преку вклештено, неподвижно и подвижно лежиште.

Товарите кои дејствуваат на носачите можат да бидат: концентрирани (дејствуваат во една точка), и рамномерно распределени, континуиран товар (дејствува на поголема должина од носачот).

Во зависност од положбата и видот на лежиштата кои се применети, полните рамни носачи можат да бидат:

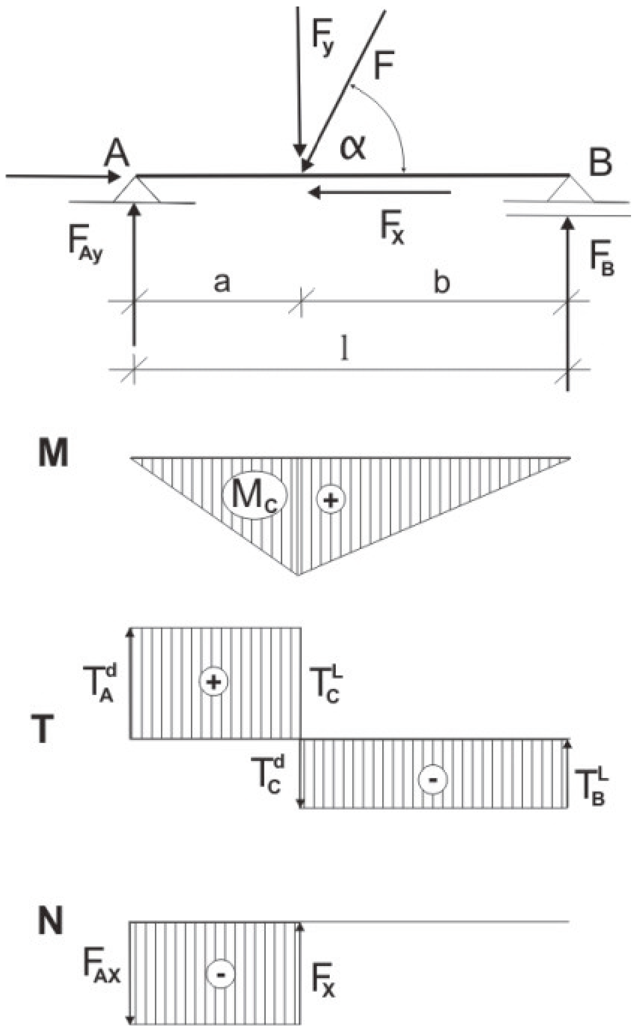
- проста греда;
- греда со еден или два препуста;
- конзолна греда;
- герберова греда.

Прашања за самооценување:

1. Кои носачи ги викаме полни рамни носачи?
2. Какво може да биде дејството на надворешниот товар кај полните рамни носачи?
3. За кое лежиште велиме дека е вклештено?
4. Колку степени на слобода има подвижното лежиште ?
5. Според видот на налегнување какви можат да бидат полните рамни носачи?

6. ВИДОВИ НОСАЧИ

6.1 ПРОСТА ГРЕДА



Сл.105

Простата греда претставува статички определен носач кој налегнува на едно неподвижно и едно подвижно лежиште. Реакциите и статичките големини (моментите, трансверзалните и аксијалните сили) ги определуваме аналитички за разни видови товари.

Проста греда товарена со концентриран товар

Аналитички метод:

Овој метод ги користи трите аналитички услови за рамнотежа.

Во случај ако надворешниот товар е коса концентрирана сила $\vec{F}$, истата најнапред ја разложуваме на нејзините компоненти (F_y и F_x).

Потоа се одредуваат реакциите $\overrightarrow{F_A}$ и $\overrightarrow{F_B}$, од условот $\sum M_A = 0$ и $\sum M_B = 0$

Контролата на точноста за добиените резултати на вертикалните компоненти на реакциите се врши со условот $\sum Y = 0$.

Хоризонталната компонента на силата $\vec{F}$ претставува хоризонтална реакција во неподвижното лежиште. Оваа реакција се определува од условот $\sum X = 0$

Врз основа на дефинициите за нападен момент, трансверзална и аксијална сила, ги определуваме статичките големини во карактеристични пресеци. Овие карактеристични пресеци се лежиштата и точките во кои дејствуваат надворешните сили.

Вака определените вредности на моментот, трансверзалните и аксијалните сили во карактеристичните пресеци, ги нанесуваме во поволен размер на линии паралени со оската на носачот. Со поврзувањето на нанесените вредности, добиваме статички дијаграми.

Анализирајќи ги овие статички дијаграми, можеме да заклучеме:

За дијаграмот на моментот:

-дијаграмот на моментот има полигонална форма со прекршување во точка каде што дејствува концентрирана сила;

-има позитивен предзнак по целата должина на простата греда, кога товарот дејствува надолу;

-најголемата вредност е во пресекот каде што трансверзалната сила го менува предзнакот.

- “+” се црта доле;” –“ се црта горе;

За дијаграмот на трансверзални сили:

-дијаграмот има скалеста форма;

-вредностите на трансверзалната сила се менуваат во точките каде што дејствуваат концентрираните сили и тоа во скокови;

-во пресекот под силата F дијаграмот го менува знакот;

-дијаграмот е затворен, бидејќи сите вертикални сили се во рамнотежа;

“ +” са црта горе; **“ –“** се црта доле;

За дијаграмот на аксијалните сили:

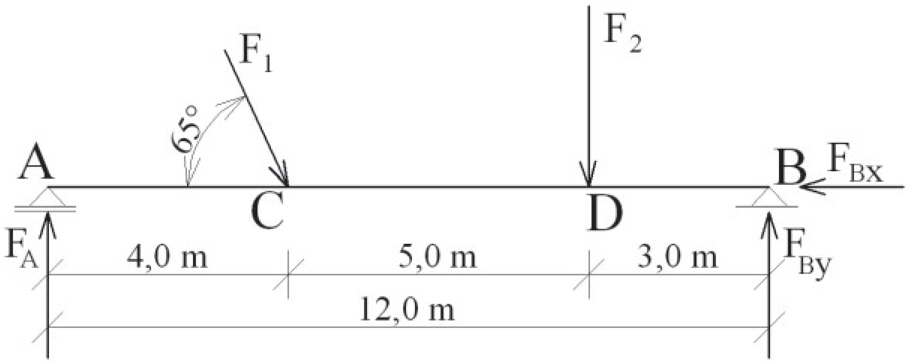
-аксијалните сили кои предизвикуваат притисок во носачот се со негативен предзнак и се цртаат под оската на носачот;

-аксијалните сили кои предизвикуваат затегнување во носачот се со позитивен предзнак и се цртаат над оската на носачот.

Запомни:**Проста греда представува статички определен носач кој налегнува на едно неподвижно и едно подвижно лежиште**.

Пример бр.39: Аналитички да се определат реакциите и статичките големини за даденото оптоварување на проста греда (сл. 106)

$F_1 = 20kN$



Сл.106

Решение:

Аналитички:

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha = 20 \cdot \sin 65^\circ = 20 \cdot 0{,}9063 = 18{,}126\,kN$$

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha = 20 \cdot \cos 65^\circ = 20 \cdot 0{,}4226 = 8{,}452\,kN$$

1. Определување реакции

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{1y} \cdot 4 + F_2 \cdot 9 - F_{By} \cdot 12 = 0$$

$$18{,}126 \cdot 4 + 30 \cdot 9 - F_{By} \cdot 12 = 0$$

$$F_{By} = \frac{72{,}504 + 270}{12} = \frac{342{,}504}{12} = 28{,}542\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_A \cdot 12 - F_{1y} \cdot 8 - F_2 \cdot 3 = 0$$

$$F_A \cdot 12 - 18{,}126 \cdot 8 - 30 \cdot 3 = 0$$

$$F_A = \frac{145{,}008 + 90}{12} = \frac{235{,}008}{12} = 19.584\,kN$$

Контрола: $\sum Y = 0$

$$F_A - F_{1y} - F_2 + F_{By} = 0$$

$$19{,}584 - 18{,}126 - 30 + 28{,}542 = 48{,}126 - 48{,}126 = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$F_{1X} - F_{BX} = 0 \quad ; \qquad F_{BX} = F_{1X} = 8{,}452\,kN$$

$$F_B = \sqrt{F_{BX}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{8{,}452^2 + 28{,}542^2} = 29{,}767\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{By}}{F_{Bx}} = \frac{28{,}542}{8{,}452} = 3{,}3769; \qquad \varphi = 73^{\circ}$$

2. Определување нападни моменти

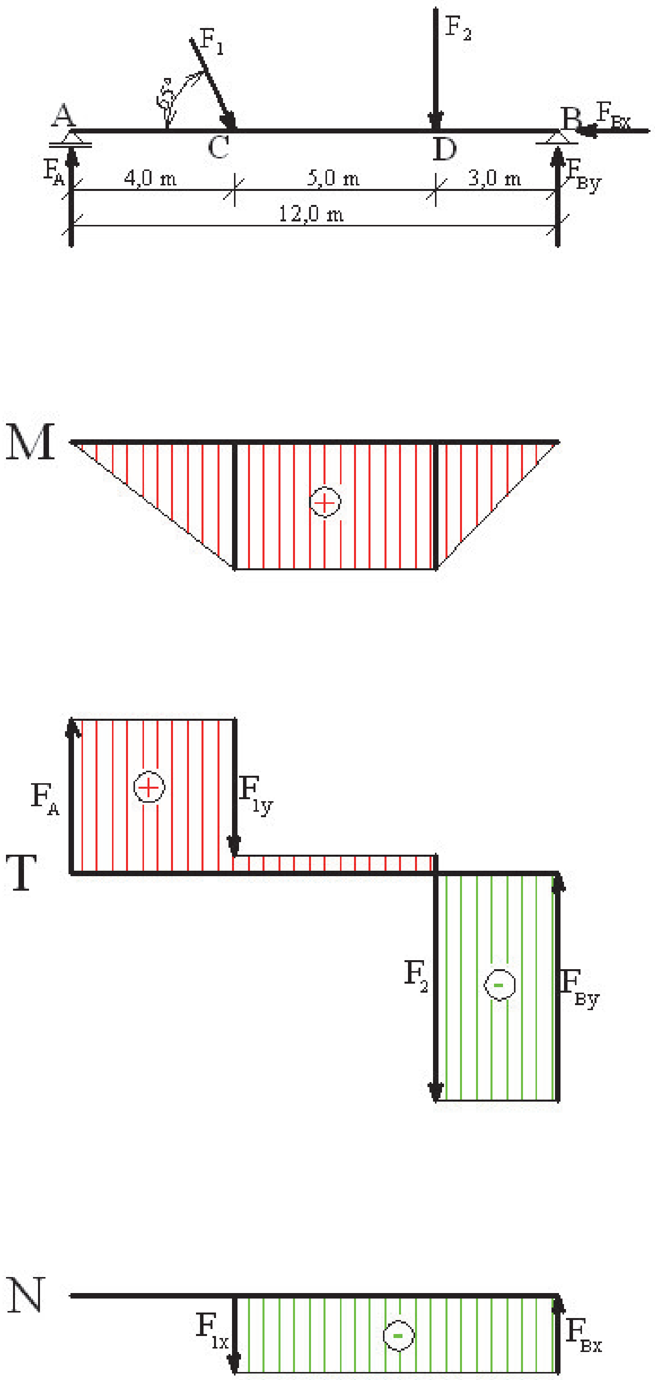
$$M_A = 0$$
$$M_C = F_A \cdot 4 = 19{,}584 \cdot 4 = 78{,}336\, kN \cdot m$$
$$M_D = F_A \cdot 9 - F_{1y} \cdot 5 = 19{,}584 \cdot 9 - 18{,}126 \cdot 5 = 85{,}626\, kN \cdot m$$
$$M_B = 0$$

3. Определување трансверзални сили

$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_A = 19{,}584\, kN$$
$$T_C^l = F_A = 19{,}584\, kN$$
$$T_C^d = F_A - F_{1y} = 19{,}584 - 18{,}126 = 1{,}458\, kN$$
$$T_D^l = F_A - F_{1y} = 19{,}584 - 18{,}126 = 1{,}458\, kN$$
$$T_D^d = F_A - F_{1y} - F_2 = 19{,}584 - 18{,}126 - 30 = -28{,}542\, kN$$
$$T_B^l = T_D^d = -28{,}542\, kN$$
$$T_B^d = 0$$

4. определување аксијални сили

$$N_{C-B} = -F_{1x} = -8{,}452\, kN$$
$$N_B{}^L = -F_{1x} = -8{,}452 kN$$
$$N_B{}^D = -F_{1x} + F_{Bx} = -8{,}452 + 8{,}542 = 0$$



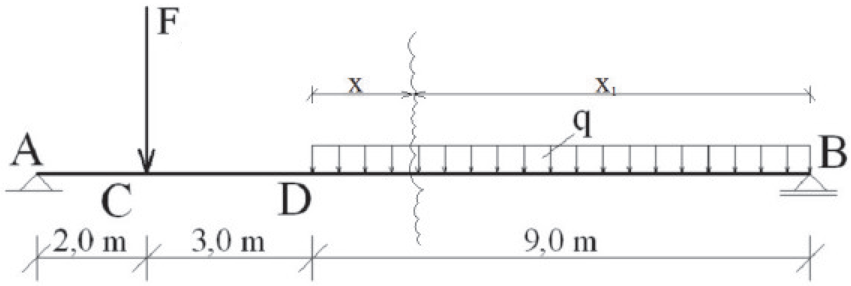
Сл.107

Проста греда товарена со рамномерно распределен товар (континуиран товар)

Постапката е иста како кај проста греда товарена со концентриран товар, со тоа што рамномерно распределениот товар се заменува со концентрирана сила која дејствува во тежиштето од товарот. Големината на таа сила е еднаква на површината од товарот, а се одредува по изразот: $F = q \cdot l$

Пример бр.40 Аналитички да се определат реакциите и статичките големини за даденото оптоварување на проста греда (сл. 108)

$F_1 = 10kN$; $q = 3kN/m$



Сл.108

Решение:

Аналитички:

$$F_q = q \cdot 9 = 3 \cdot 9 = 27\,kN$$

1. Определување реакции (сл.109):

$$\sum M_A = 0$$

$$F \cdot 2 + q \cdot 9 \cdot (2+3+4{,}5) - F_B \cdot 14 = 0$$

$$10 \cdot 2 + 3 \cdot 9 \cdot (2+3+4{,}5) - F_B \cdot 14 = 0$$

$$F_B = \frac{20 + 256.5}{14} = 19{,}75\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_A \cdot 14 - F \cdot 12 - q \cdot 9 \cdot 4{,}5 = 0$$

$$F_A \cdot 14 - 10 \cdot 12 - 3 \cdot 9 \cdot 4{,}5 = 0$$

$$F_A = \frac{120 + 121.5}{14} = 17{,}25\,kN$$

Контрола:

$$\sum Y = 0$$

$$F_A - F - q \cdot 9 + F_B = 0$$

$$17{,}25 - 10 - 3 \cdot 9 + 19{,}75 = 0$$

$$37 - 37 = 0$$

2. Определување нападни моменти

$$M_A = 0$$

$$M_C = F_A \cdot 2 = 17{,}25 \cdot 2 = 34{,}5 \; kN \cdot m$$

$$M_D = F_A \cdot 5 - F \cdot 3 = 17{,}25 \cdot 5 - 10 \cdot 3 = 86{,}25 - 30 = 56{,}25 \; kN \cdot m$$

$$M_B = 0$$

3. Определување трансверзални сили

$$T_A^l = 0$$

$$T_A^d = F_A = 17{,}25 \, kN$$

$$T_C^l = T_A^d = F_A = 17{,}25 \, kN$$

$$T_C^d = T_C^l - F = 17{,}25 - 10 = 7{,}25 \, kN$$

$$T_D = T_C^d = 7{,}25 \, kN$$

$$T_B^l = T_D - q \cdot 9 = 7{,}25 - 3 \cdot 9 = 7{,}25 - 27 = -19{,}75 \, kN$$

$$T_B^d = T_B^l + F_B = -19{,}75 + 19{,}75 = 0$$

Пресекот каде T=0 се нарекува **опасен пресек**, затоа што во тој пресек нападниот момент има екстремна вредност.

За да се определи положбата на опасниот пресек трансверзалната сила ја изразуваме во функција од должината на товарот q пред пресекот (сл. 108).

$$T_X^l = F_A - F - q \cdot x = 0; \;\; 17{,}25 - 10 - 3 \cdot x = 0; \;\; x = \frac{17{,}25 - 10}{3} = 2{,}417 \, m$$

контрола:

$$T_{x_1}^d = 0$$

$$T_{x_1}^d = F_B - q \cdot x_1 = 0; \;\; x_1 = \frac{F_B}{q} = \frac{19{,}75}{3} = 6{,}583 \, m$$

$$x + x_1 = 9; \qquad 2{,}417 + 6{,}583 = 9; \qquad 9 = 9$$

Екстремната вредност на нападниот момент во овој пресек е:

$$M_{\max} = M_x = F_A(5 + x) - F(3 + x) - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_{\max} = 17{,}25 \cdot (5 + 2{,}417) - 10 \cdot (3 + 2{,}417) - 3 \cdot 2{,}417 \cdot \frac{2{,}417}{2}$$

$$M_{\max} = 17{,}25 \cdot 7{,}417 - 10 \cdot 5{,}417 - 3 \cdot 2{,}417 \cdot 1{,}2085 = 127{,}94 - 54{,}17 - 8{,}76$$

$$M_{\max} = 65{,}01 \, kNm$$

контрола:

$$M_{\max} = F_A \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2}$$

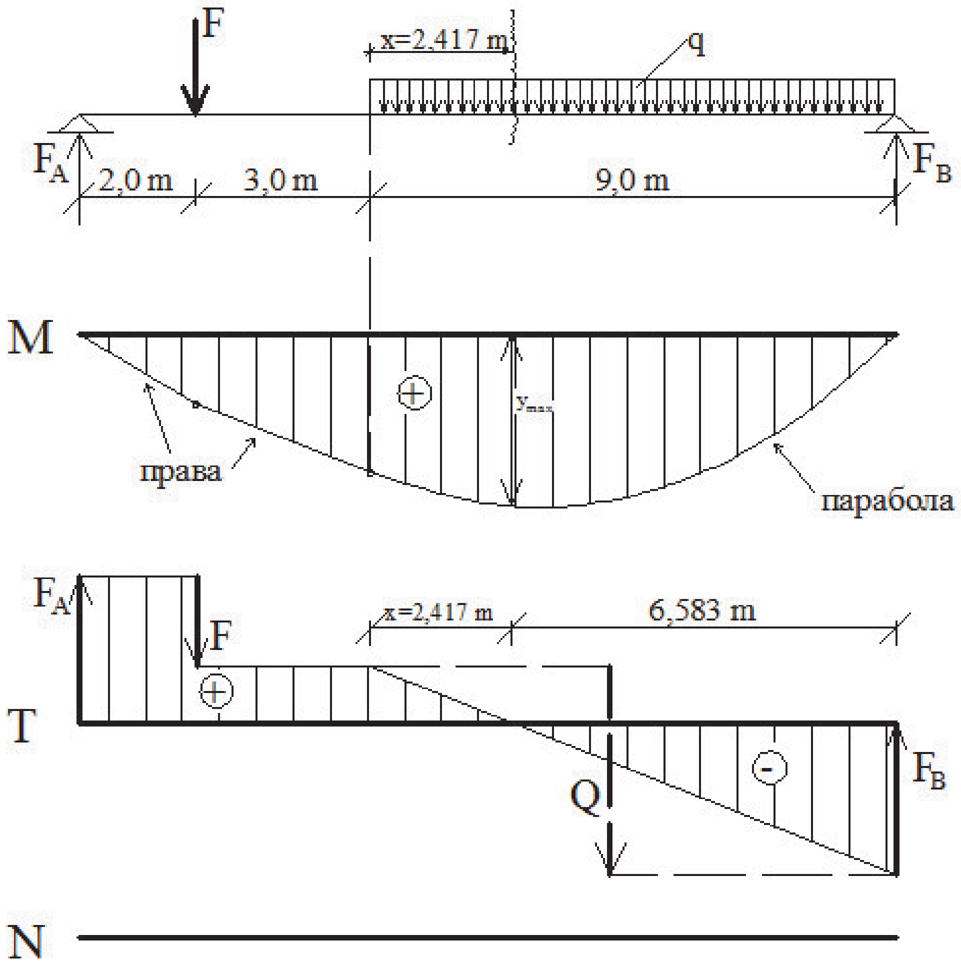
$$M_{\max} = 19{,}75 \cdot 6{,}5833 - 3 \cdot 6{,}5833 \cdot \frac{6{,}5833}{2} = 130{,}0201 - 65{,}0097 = 65{,}01 kNm$$

4. Определување аксијални сили

$$N_{A-B} = 0$$

Појаснување:

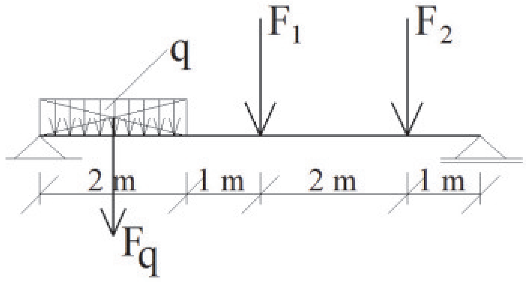
Дијаграмот на моменти кај проста греда товарена со мешовит товар е составен од двадела, односно дел поврзан со прави линии каде имаме дејство од концентриран товар, а со крива линија (парабола) на делот каде дејствува рамномерно распределен товар. Моментен дијаграм на (сл. 109).



Сл.109

Пример бр.41: аналитички да се определат статичките големини за даденото оптоварување на проста греда (слика 110)

$F_1 = 5kN$; $F_2 = 3kN$ $q = 3kN/m$



Сл.110

Решение:

Аналитички:

$$F_q = q \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6kN$$

1. Определување реакции (сл.111):

$$\sum M_A = 0$$

$$F_q \cdot 1 + F_1 \cdot 3 + F_{2\cdot} 5 - F_B \cdot 6 = 0$$

$$6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 - F_B \cdot 6 = 0$$

$$6 + 15 + 15 - F_B \cdot 6 = 0$$

$$36 - F_B \cdot 6 = 0$$

$$-F_B = -\frac{36}{6}$$

$$F_B = 6kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{AY} \cdot 6 - F_q \cdot 5 - F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 1 = 0$$

$$F_{AY} \cdot 6 - 6 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$$

$$F_{AY} \cdot 6 - 30 - 15 - 3 = 0$$

$$F_{AY} \cdot 6 - 48 = 0$$

$$F_{AY} = \frac{48}{6}$$

$$F_{AY} = 8kN$$

Контрола:

$$\sum Y = 0$$

$$F_{Ay} - F_q - F_1 - F_2 + F_B = 0$$

$$8 - 6 - 5 - 3 + 6 = 0$$

$$14 - 14 = 0$$

$$0 = 0$$

2. Определување нападни моменти

$$M_A = 0$$
$$M_C = F_{AY} \cdot 2 - F_q \cdot 1 = 8 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 16 - 6 = 10kNm$$
$$M_D = F_{AY} \cdot 3 - F_q \cdot 2 = 8 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 24 - 12 = 12\ kN \cdot m$$
$$M_E = F_{AY} \cdot 5 - F_q \cdot 4 - F_1 \cdot 2 = 8 \cdot 5 - 6 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 40 - 24 - 10 = 6kNm$$
$$M_B = 0$$

3. Определување трансверзални сили

$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_{AY} = 8kN$$
$$T_C = T_A^d - F_q = 8 - 6 = 2kN$$
$$T_D^l = T_C = 2kN$$
$$T_D^d = T_C^l - F_1 = 2 - 5 = -3kN$$
$$T_E^l = T_D^d = -3kN$$
$$T_E^d = T_E^l - F_2 = -3 - 3 = -6kN$$
$$T_B^l = T_E^d = -6kN$$
$$T_B^d = T_B^l + F_B = -6 + 6 = 0$$

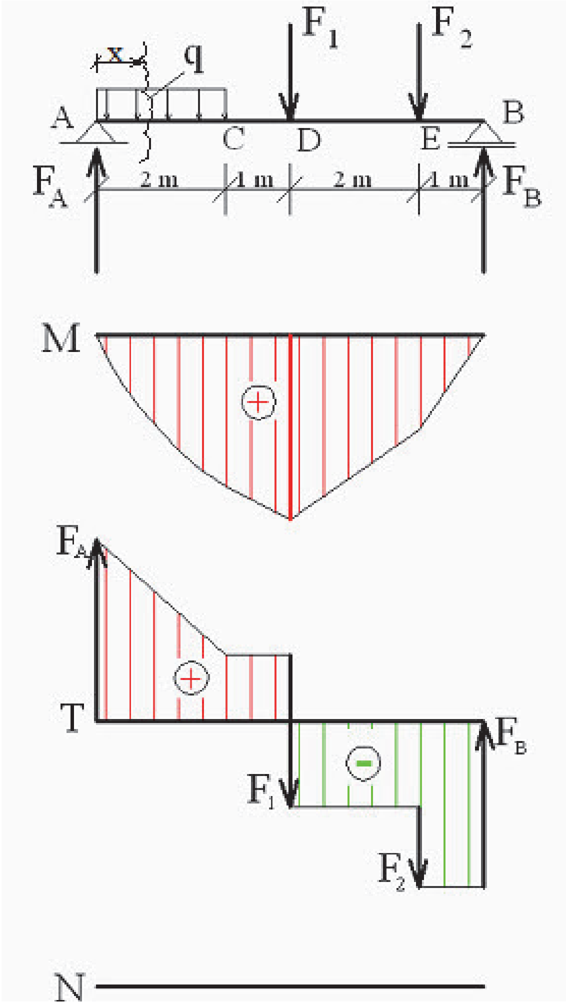
Опасен пресек:

$$T_X = F_{Ay} - x \cdot q = 0$$
$$8 - x \cdot 3 = 0$$
$$x = \frac{8}{3} = 2{,}67\,m$$

Во овој случај нема опасен пресек затоа што се добива $x > 2m,$ односно на делот AC трансверзалната сила не го менува знакот.

4. Определување аксијални сили

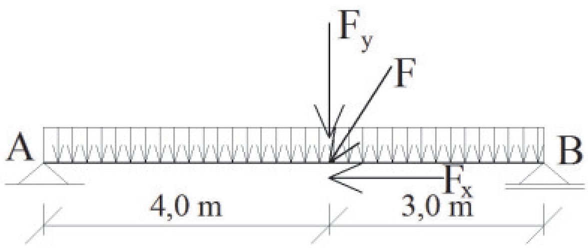
$$N_{A-B} = 0$$



Сл.111

Пример бр.4: аналитички да се определат статичките големини за даденото оптоварување на проста греда (слика 112)

$F = 25kN$; $\alpha = 45^{\circ}$; $q = 3kN/m$



Сл.112

Решение:

Аналитички:

$F_{q1} = q \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12\,kN$ $\qquad F_{q2} = q \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9\,kN$

$F_Y = F \cdot \sin\alpha = 25 \cdot \sin 45^{\circ} = 25 \cdot 0{,}707 = 17{,}678\,kN$

$F_X = F \cdot \cos\alpha = 25 \cdot \cos 45^{\circ} = 25 \cdot 0{,}707 = 17{,}678\,kN$

1. Определување реакции (сл.113):

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{q1} \cdot 2 + F_Y \cdot 4 + F_{q2\cdot} \cdot 5{,}5 - F_B \cdot 7 = 0$$

$$12 \cdot 2 + 17{,}678 \cdot 4 + 9 \cdot 5{,}5 - F_B \cdot 7 = 0$$

$$F_B = \frac{24 + 70{,}712 + 49{,}5}{7}$$

$$F_B = 20{,}602\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{AY} \cdot 7 - F_{q1} \cdot 5 - F_Y \cdot 3 - F_{q2} \cdot 1{,}5 = 0$$

$$F_{AY} \cdot 7 - 12 \cdot 5 - 17{,}678 \cdot 3 - 17{,}678 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$F_{AY} = \frac{60 + 53{,}034 + 26{,}517}{7}$$

$$F_{AY} = 18{,}076\,kN$$

Контрола:

$$\sum Y = 0$$

$$F_{AY} - F_{q1} - F_Y - F_{q2} + F_B = 0$$

$$18{,}076 - 12 - 17{,}678 - 9 + 20{,}602 = 0$$

$$38{,}678 - 38{,}678 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$F_{AX} - F_X = 0; \quad F_{AX} = F_X = 17{,}678\,kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{AX}^2 - F_{AY}^2} = \sqrt{17{,}678^2 - 18{,}076^2} = \sqrt{312{,}512 \text{ - } 326{,}742} = \sqrt{639{,}254}$$

$$F_A = 25{,}283\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{AY}}{F_{AX}} = \frac{18{,}076}{17{,}678} = 1{,}0225; \qquad \varphi = 45^\circ$$

2. Определување нападни моменти

$$M_A = 0$$

$$M_C = F_{AY} \cdot 4 - F_{q1} \cdot 2 = 18{,}076 \cdot 4 - 12 \cdot 2 = 48{,}305\,kNm$$

$$M_B = 0$$

3. Определување трансверзални сили

$$T_A^l = 0$$

$$T_A^d = F_{AY} = 18{,}076\,kN$$

$$T_C^l = T_A^d - F_{q1} = 18{,}076 - 12 = 6{,}076\,kN$$

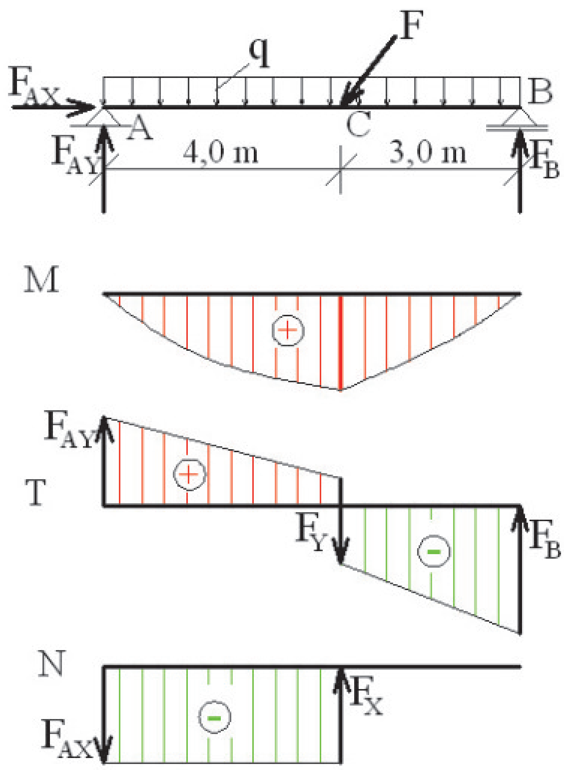
$$T_C^d = T_C^l - F_Y = 6{,}076 - 17{,}678 = -11{,}602\,kN$$

$$T_B^l = T_C^d - F_{q2} = -11{,}602 - 9 = -20{,}602\,kN$$

$$T_B^d = T_B^l + F_B = -20{,}602 + 20{,}602 = 0$$

4. Определување аксијални сили

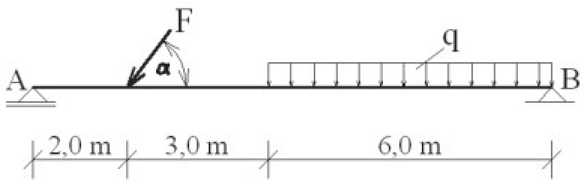
$$N_{A-C} = -F_X = -17{,}678\,kN$$



Сл.113

Задачи за вежбање:

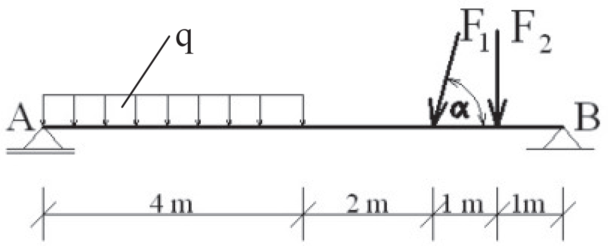
Задача бр.1



Сл.114

$F = 10\,kN$; $\alpha = 60^{\circ}$; $q = 2\,kN/m$

Задача бр.2



Сл.115

$F_1 = F_2 = F = 10\,kN$; $\alpha = 60^{\circ}$; $q = 2\,kN/m$

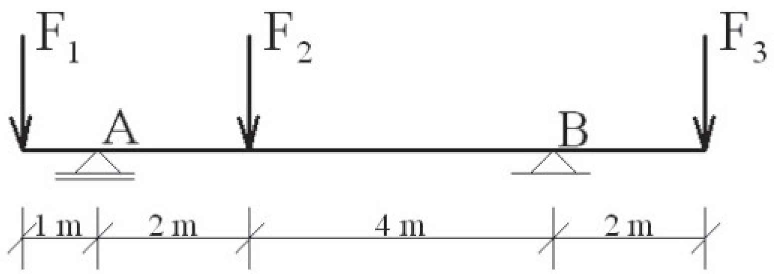
6.2 ГРЕДА СО ПРЕПУСТИ

Греда потпрена на две лежишта, од кои едното е неподвижно, а другото подвижно, чии краишта се продолжени преку едното или двете лежишта се нарекува греда со препусти. Реакциите и статичките големини се определуваат аналитички и графички (ние ќе се задржиме само на аналитички метод).

Примери од греда со еден или два препуста, товарена со концентриран и мешовит товар.

Пример бр.43: аналитички да се определат реакциите и пресечните статички големини за даденото оптоварување кај гредата со два препуста (сл. 116)

$F_1 = 2\,kN$; $F_2 = 4\,kN$; $F_3 = 2\,kN$



Сл.116

Решение:

Аналитички:

1. **Определување реакции (сл.117):**

$$\sum M_A = 0$$

$$-F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 2 - F_{B\cdot} \cdot 6 + F_3 \cdot 8 = 0$$

$$-2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - F_B \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 0$$

$$F_B = \frac{-2 + 8 + 16}{6}$$

$$F_B = 3{,}67\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_1 \cdot 7 + F_A \cdot 6 - F_2 \cdot 4 + F_3 \cdot 2 = 0$$

$$-2 \cdot 7 + F_A \cdot -4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0$$

$$F_A = \frac{14 + 16 - 4}{6}$$

$$F_{AY} = 4{,}33\,kN$$

Контрола:

$$\sum Y = 0$$

$$-F_1 + F_A - F_2 + F_B - F_3 = 0$$

$$-2 + 4{,}33 - 4 + 3{,}67 - 2 = 0$$

$$-8 + 8 = 0$$

$$0 = 0$$

2. Определување нападни моменти

$$M_C = 0$$

$$M_A = -F_1 \cdot 1 = -2 \cdot 1 = -2 kNm$$

$$M_D = -F_1 \cdot 3 + F_A \cdot 2 = -2 \cdot 3 + 4{,}33 \cdot 2 = -6 + 8{,}66 = 2{,}66\, kNm$$

$$M_B = -F_1 \cdot 7 + F_A \cdot 6 - F_2 \cdot 4 = -2 \cdot 7 + 4{,}33 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = -14 + 26 - 16 = -4\, kNm$$

$$M_E = 0$$

3. Определување трансверзални сили

$$T_C^l = 0$$

$$T_C^d = -F_1 = -2\ kN$$

$$T_A^l = T_C^d = -2\, kN$$

$$T_A^d = T_A^l + F_A = -2 + 4{,}33 = 2{,}33\, kN$$

$$T_D^l = T_A^d = 2{,}33\, kN$$

$$T_D^d = T_D^l - F_2 = 2{,}33 - 4 = -1{,}67\, kN$$

$$T_B^l = T_D^d = -1{,}67\, kN$$

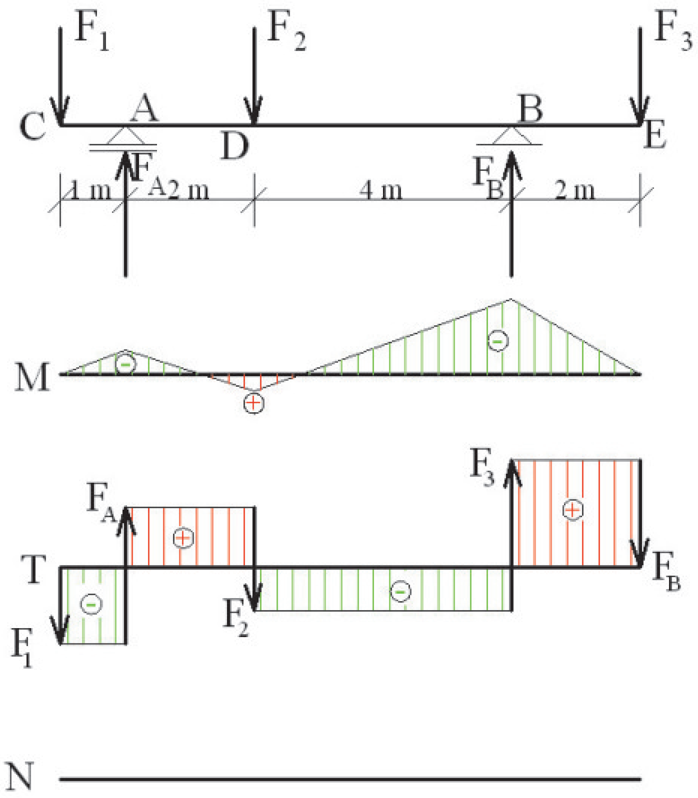
$$T_B^d = T_B^l + F_B = -1{,}67 + 3{,}67 = 2\, kN$$

$$T_E^l = T_B^d = 2\, kN$$

$$T_E^d = T_E^l - F_3 = 2 - 2 = 0$$

4. Определување аксијални сили

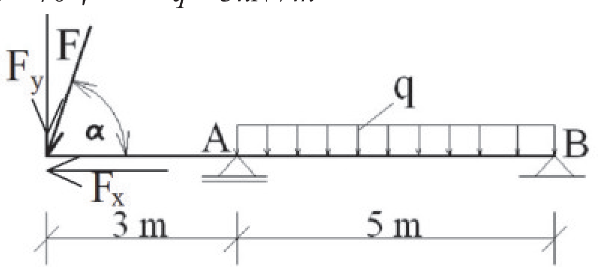
$$N_{C-E} = 0$$



Сл.117

Пример бр.44: аналитички да се определат статичките големини за даденото оптоварување кај греда со еден препуст (сл. 118)

$F = 8kN$; $\alpha = 70^{\circ}$; $q = 3kN/m$



Сл.118

Решение:

Аналитички:

$$F_q = q \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15kN$$

$$F_X = F \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \cos 70^{\circ} = 8 \cdot 0{,}342 = 2{,}74\,kN$$

$$F_Y = F \cdot \sin\alpha = 8 \cdot \sin 70^{\circ} = 8 \cdot 0{,}9397 = 7{,}52\,kN$$

1. Определување реакции (сл.119):

$$\sum M_A = 0$$

$$-F_Y \cdot 3 + F_q \cdot 2{,}5 - F_{BY} \cdot 5 = 0$$

$$-7{,}52 \cdot 3 + 15 \cdot 2{,}5 - F_{BY} \cdot 5 = 0$$

$$F_{BY} = \frac{-22{,}56 + 37{,}5}{5}$$

$$F_{BY} = 2{,}988\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_Y \cdot 8 + F_A \cdot 5 - F_q \cdot 2{,}5 = 0$$

$$-7{,}52 \cdot 8 + F_A \cdot 5 - 15 \cdot 2{,}5 = 0$$

$$F_A = \frac{60{,}16 + 37{,}5}{5}$$

$$F_A = 19{,}532\,kN$$

Контрола: $\sum Y = 0$

$$-F_Y + F_A - F_q + F_B = 0$$

$$-7{,}52 + 19{,}532 - 15 + 2{,}988 = 0$$

$$-22{,}52 + 22{,}52 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$-F_X + F_{BX} = 0$$

$$F_X = F_{BX} = 2{,}74\,kN$$

$$F_B = \sqrt{F_{BX}^2 + F_{BY}^2} = \sqrt{2{,}74^2 + 2{,}988^2} = \sqrt{7{,}51 + 8{,}93}$$

$$F_B = 4{,}05\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{BY}}{F_{BX}} = \frac{2{,}988}{2{,}74} = 1{,}0905109 \qquad \varphi = 47^\circ$$

2. Определување нападни моменти

$$M_C = 0$$

$$M_A = -F_Y \cdot 3 = -7{,}52 \cdot 3 = -22{,}56\,kNm$$

$$M_B = 0$$

3. Определување трансверзални сили

$$T_C^l = 0$$

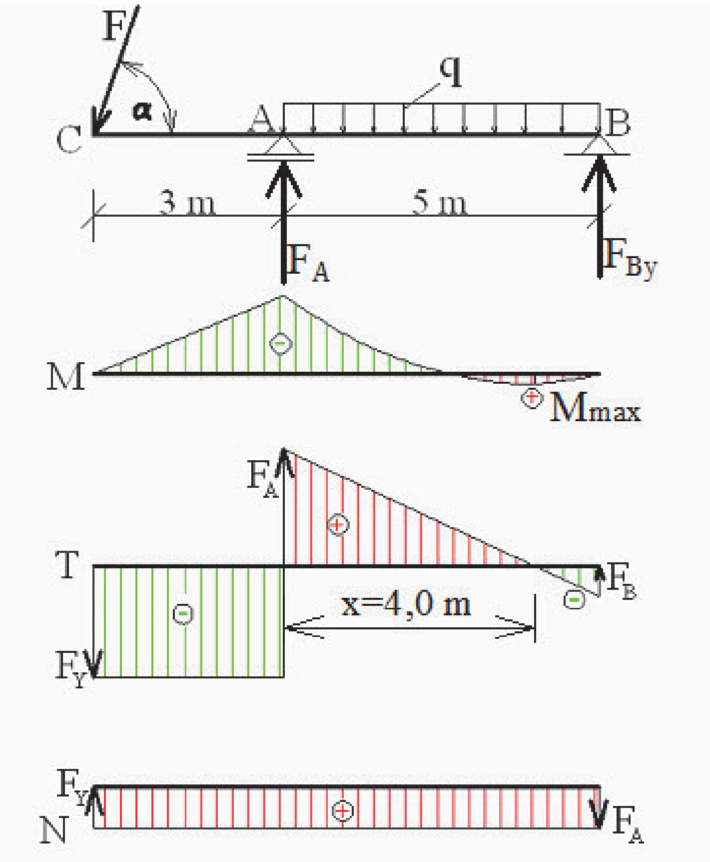
$$T_C^d = -F_Y = -7{,}52\ kN$$
$$T_A^l = T_C^d = -7{,}52\,kN$$
$$T_A^d = T_A^l + F_A = -7{,}52 + 19{,}532 = 12{,}01\,kN$$
$$T_B^l = T_A^d - F_q = 12{,}01 - 15 = -2{,}99\,kN$$
$$T_B{}^d = 0$$

На делот од точката А до точката В трансверзалната сила го менува знакот што значи дака има опасен пресек на растојание "x" од точката А:

$$T_x = 0$$
$$F_{By} - q \cdot x = 0$$
$$x = \frac{F_{By}}{q} = \frac{2{,}988}{3} \approx 1m$$
$$x_{\max} = 5 - x = 5 - 1 = 4m$$
$$M_{\max} = -F_y \cdot 7 + F_A \cdot 4 - \frac{q \cdot x^2}{2}$$
$$M_{\max} = -7{,}52 \cdot 7 + 19{,}532 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4^2}{2}$$
$$M_{\max} = 1{,}50kNm$$

4. Определување аксијални сили

$$N_{C-B} = F_{BX} = 2{,}74\,kN$$



Сл.119

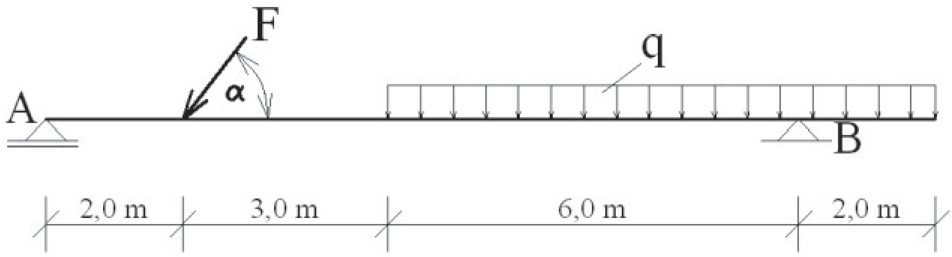
Запомни:

Греда со препусти е статички определен носач кој со едниот или двата краја преминува преку потпорите (лежиштата).

Ако носачот преминува само со едниот крај се вика греда со еден препуст, а ако преминува преку двата краја се вика греда со два препуста.

Задачи за вежбање:

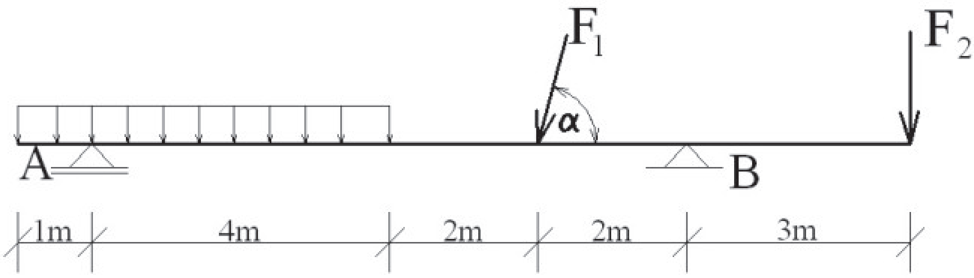
Задача бр.1



Сл.120

$F = 13kN$; $q = 6kN/m'$; $\alpha = 60^\circ$

Задача бр.2



Сл.121

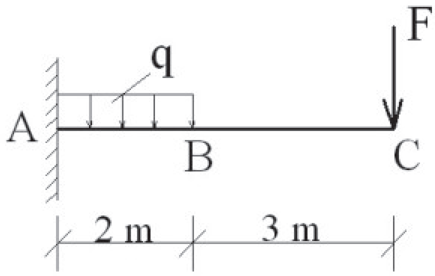
$F_1 = 8kN$; $F_2 = 5kN$; $q = 6kN/m'$; $\alpha = 60^\circ$

6.3 КОНЗОЛА

Носачот кој на едниот крај е вклештен, а на другиот е слободен се нарекува конзола. Реакциите и статичките големини се определуваат по аналитички и графички метод. (Ние ќе се задржиме само на аналитичкиот.) Ако конзолата е товарена со вертикална концентрирана сила, во вклештувањето предизвикува вертикална реакција и момент на вклештување (реактивен момент).

Пример бр.45: аналитички да се определат статичките големини за даденото оптоварување кај гредата со два препуста (слика 122)

$F_1 = 2\,kN$; $\quad q = 3\,kN/m$



Сл.122

Решение:

Аналитички:

$$F_q = q \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6kN$$

1. **Определување реакции (сл.123):**

$\Sigma M_A = 0$

$-M_A + q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 5 = 0$

$M_A = 16kNm$

$\sum Y = 0$

$$F_A - F_q - F = 0$$

$$F_A = 6 + 2 = 8\,kN$$

2. **Определување нападни моменти**

$$M_A = -F_q \cdot 1 - F \cdot 5 = -6 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -16\,kNm$$

$$M_B = -F \cdot 3 = -2 \cdot 3 = -6\,kNm$$

$$M_C = 0$$

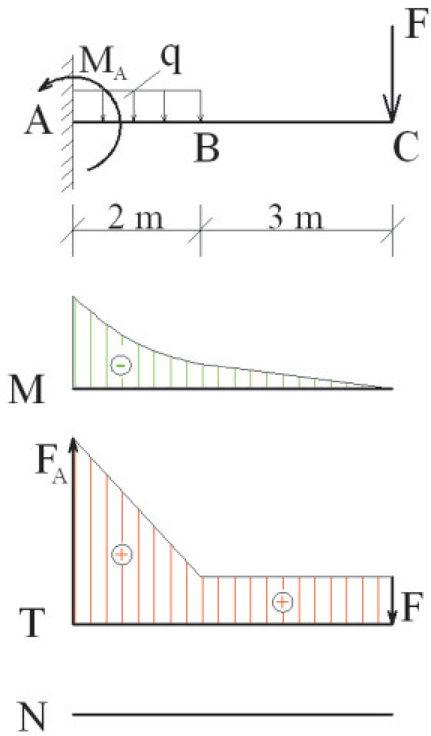
3. **Определување трансверзални сили**

$$T_A^l = 0$$

$$T_A^d = F_A = 8\ kN$$
$$T_B = F_A - F_q = 8 - 6 = 2\,kN$$
$$T_C^l = T_B = 2\,kN$$
$$T_C^d = T_C^l - F = 2 - 2 = 0$$

4. Определување аксијални сили

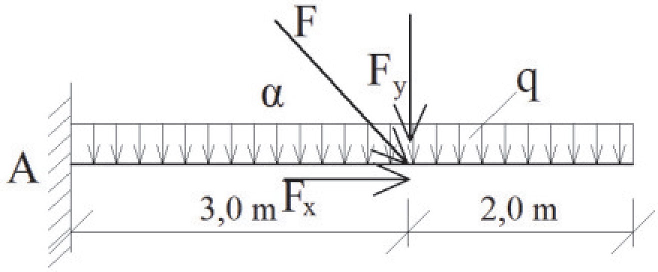
$$N_{A-C} = 0$$



Сл.123

Пример бр.46: аналитички да се определат статичките големини за даденото оптоварување кај гредата со два препуста (слика 124)

$F_1 = 5\,kN$; $q = 4\,kN/m$; $\alpha = 60^\circ$



Сл.124

Решение:

Аналитички:

$$F_{q1} = q \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12kN$$
$$F_{q2} = q \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8kN$$
$$F_Y = F \cdot \sin\alpha = 5 \cdot \sin 60^\circ = 5 \cdot 0{,}866 = 4{,}33\ kN$$
$$F_X = F \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5\ kN$$

1. Определување реакции (сл.125)

$$\sum Y = 0$$
$$F_{AY} - F_{q1} - F_Y - F_{q2} = 0$$
$$F_{AY} = 12 + 8 + 4{,}33 = 24{,}33kN$$

$$\sum X = 0$$
$$-F_{AX} + F_X = 0$$
$$F_{AX} = 2{,}5kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{AX}^2 + F_{AY}^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 24{,}33^2} = \sqrt{6{,}25 + 591{,}95} = 24{,}22kN$$
$$tg\varphi = \frac{F_{AY}}{F_{AX}} = \frac{24{,}33}{2{,}5} = 9{,}6001; \qquad \varphi = 86^\circ$$

2. Определување нападни моменти

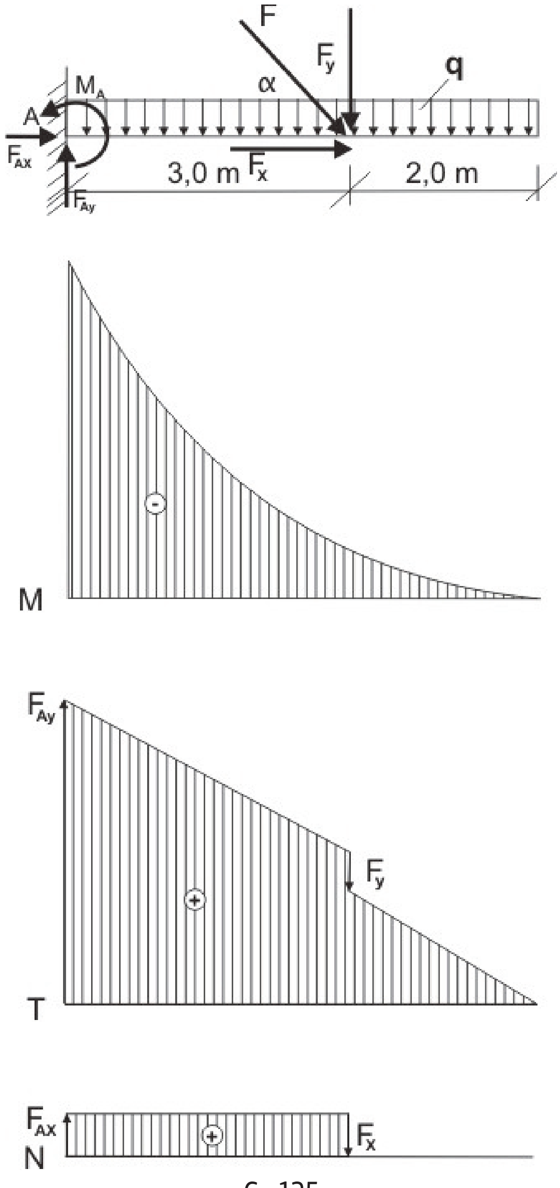
$$M_A = -F_{q1} \cdot 3 - F_Y \cdot 6 - F_{q2} \cdot 8 = -12 \cdot 1{,}5 - 4{,}33 \cdot 3 - 8 \cdot 4 = -62{,}99kNm$$
$$M_B = -F_{q2} \cdot 2 = -8 \cdot 1 = -8kNm$$
$$M_C = 0$$

3. Определување трансверзални сили

$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_{AY} = 24{,}33\ kN$$
$$T_B^l = F_{AY} - F_{q1} = 24{,}33 - 12 = 12{,}33\,kN$$
$$T_B^d = F_{AY} - F_{q1} - F_Y = 24{,}33 - 12 - 4{,}33 = 8\,kN$$
$$T_C = T_B^d - F_{q2} = 8 - 8 = 0\,kN$$

4. Определување аксијални сили

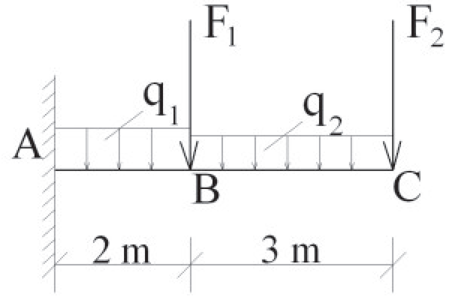
$$N_{A-B} = F_{AX} = 2{,}5\,kN$$



Сл.125

Пример бр.47: аналитички да се определат статичките големини за даденото оптоварување кај гредата со два препуста (слика 126)

$F_1 = 4\,kN$; $F_2 = 2\,kN$ $q_1 = 3\,kN/m$; $q_2 = 1\,kN/m$



Сл.126

Решение:

Аналитички:

$$F_{q1} = q_1 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6\,kN$$
$$F_{q2} = q_2 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3\,kN$$

1. Определување реакции (сл.127):

$$\sum Y = 0$$
$$F_A - F_{q1} - F_1 - F_{q2} - F_2 = 0$$
$$F_A = 6 + 4 + 3 + 2 = 15\,kN$$

2. Определување нападни моменти

$$M_A = -F_{q1} \cdot 1 - F_1 \cdot 2 - F_{q2} \cdot 3{,}5 - F_2 \cdot 5 = -6 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 6 \cdot 3{,}5 - 2 \cdot 5$$
$$M_A = -6 - 8 - 10{,}5 - 10 = -34{,}5\,kNm$$
$$M_B = -F_{q2} \cdot 1{,}5 - F_2 \cdot 3 = -3 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot 3 = -4{,}5 - 6 = -10{,}5\ kNm$$
$$M_C = 0$$

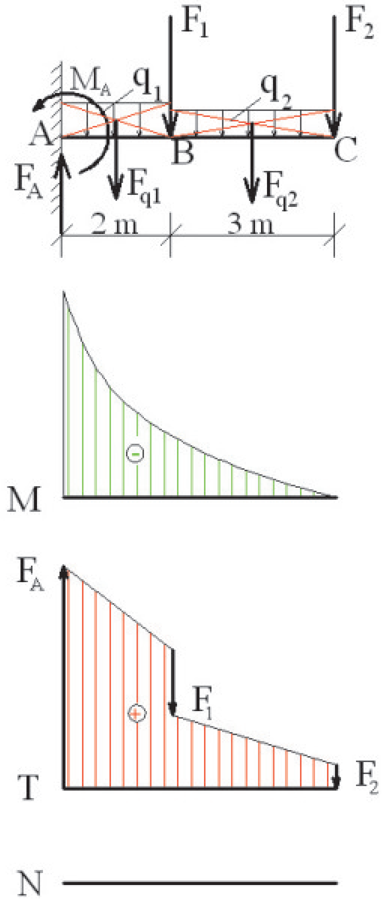
3. Определување трансверзални сили

$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_A = 15\ kN$$

$$T_B^l = F_A - F_{q1} = 15 - 6 = 9\,kN$$
$$T_B^d = T_B^l - F_1 = 9 - 4 = 5\,kN$$
$$T_C^l = T_B^d - F_{q2} = 5 - 3 = 2\,kN$$
$$T_C^d = T_C^l - F_2 = 2 - 2 = 0$$

4. Определување аксијални сили

$$N_{A-C} = 0$$



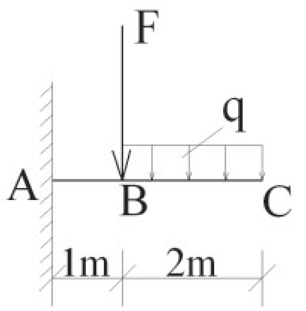
Сл.127

Запомни:

Конзола е статички определен носач кој на едниот крај е вклештрн, а на другиот е слободен.

Задачи за вежбање:

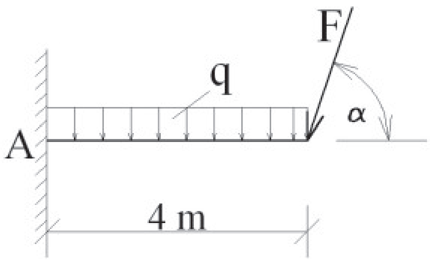
Задача бр.1



$F = 8\,kN$; $q = 5\,kN/m$

Сл.128

Задача бр.2



$F = 6\,kN$; $q = 2\,kN/m$;
$\alpha = 45^\circ$

Сл.129

6.4 ГЕРБЕРОВА ГРЕДА

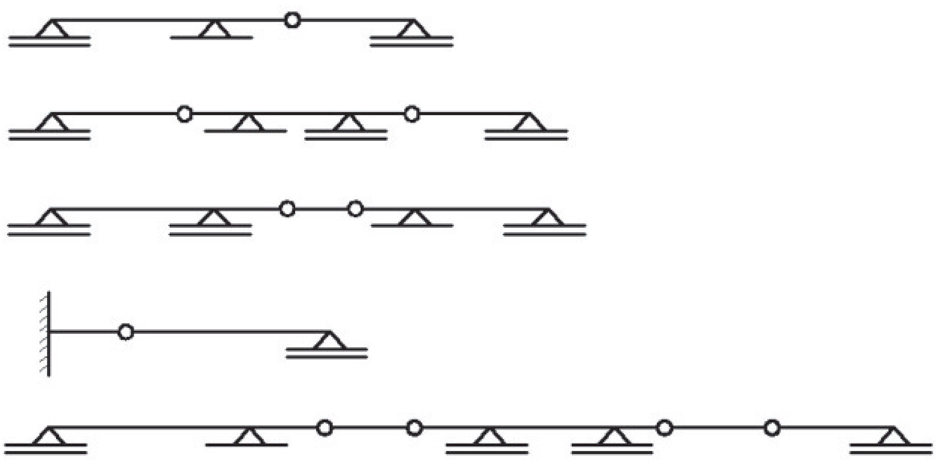
Статички определен греден систем кој може да биде составен од две или повеќе прости греди, греди со еден или два препуста, или конзоли, меѓусебно врзани со зглобови, се нарекуваат **герберова греда**. Ваквите греди првпат ги применил инженерот Гербер чие име го носат и денес.

Зглобовите на овие греди се конструирани така што можат да пренесат трансверзални и аксијални сили, но не и моменти. Поради оваа особина може да се постави условот $M_G = 0$

За да биде герберовиот носач статички определен, односно сите реакции да можат да се определат од трите аналитички услови за рамнотежа: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M = 0$ и дополнителниот услов $M_G = 0$, треба да постои одреден однос меѓу бројот на потпирачите и бројот на зглобовите. Герберова греда со n потпирачи треба да има $n-2$ зглобови. За да биде ваквиот носач стабилен, во едно поле смее да има најмногу два зглоба, а во крајните полиња доколку потпирката не е вклештена, само еден зглоб. Зглобовите кај герберовата греда така се распределуваат што истата може да се разложи на прости греди, греди со препусти и конзоли.

Местото на зглобовите од економска гледна точка се предвидуваат така што моментите во поле се приближно еднакви на моментите над потпорите. Сите лежишта треба да бидат подвижни освен едно, кое е неподвижно, и ги прима хоризонталните сили.

Статички шеми на неколку вида герберови греди се прикажани на сликата.(сл.130)



Сл.130

Реакциите и статичките големини кај герберовата греда се определуваат по две методи:

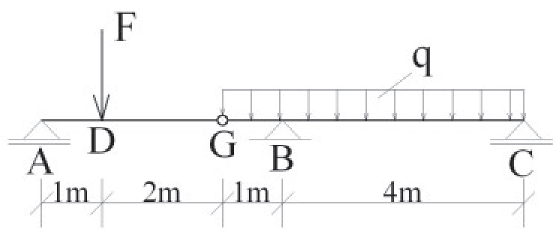
-директен метод;

-метод на разложување.

Примери од герберова греда:

Пример бр.48: аналитички да се определат статичките големини за даденото оптоварување кај герберовата греда (слика 131)

$F = 16kN$; $q = 3kN/m$



Сл.131

Решение:

Аналитички:

$$F_{q1} = q \cdot 1 = 3 \cdot 1 = 3\,kN$$
$$F_{q2} = q \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12\,kN$$

1. Определување реакции (сл.132):

греда: $A-G$:

$\sum M_G^l = 0$

$$F_A \cdot 3 - F \cdot 2 = 0$$
$$F_A = \frac{16 \cdot 2}{3} = 10{,}67\,kN$$

$\sum Y = 0$

$$F_A - F - F_G = 0$$
$$F_G = 16 - 10{,}67 = 5{,}33\,kN$$

Зглобот се заменува со неподвижно лежиште кое префрла реакции врз примарниот носач на кој налегнува.

греда со препуст: $G-C$

$\sum M_B = 0$

$$-F_G \cdot 1 - F_{q1} \cdot 0{,}5 + F_{q2} \cdot 2 - F_C \cdot 4 = 0$$
$$F_C = \frac{-5{,}33 \cdot 1 - 3 \cdot 0{,}5 + 12 \cdot 2}{4} = 4{,}29\,kN$$

$\sum M_C = 0$

$$-F_G \cdot 5 - F_{q1} \cdot 4{,}5 + F_B \cdot 4 - F_{q2} \cdot 2 = 0$$
$$F_B = \frac{5{,}33 \cdot 5 + 3 \cdot 4{,}5 + 12 \cdot 2}{4} = 16{,}04\,kN$$

контрола:

$\sum Y = 0$

$$F_A - F + F_B - F_{q1} - F_{q2} + F_C = 0$$
$$10{,}67 - 10 + 16{,}04 - 3 - 12 + 4{,}29 = 0;\; 31 - 31 = 0; \quad 0 = 0$$

2. Определување нападни моменти

$$M_A = 0$$
$$M_D = F_A \cdot 1 = 10{,}67 \cdot 1 = 10{,}67\,kNm$$
$$M_B = F_A \cdot 4 - F \cdot 3 - F_{q1} \cdot 0{,}5 = 10{,}67 \cdot 4 - 16 \cdot 3 - 3 \cdot 0{,}5 = -6{,}833\;kNm$$
$$M_C = 0$$

3. Определување трансверзални сили

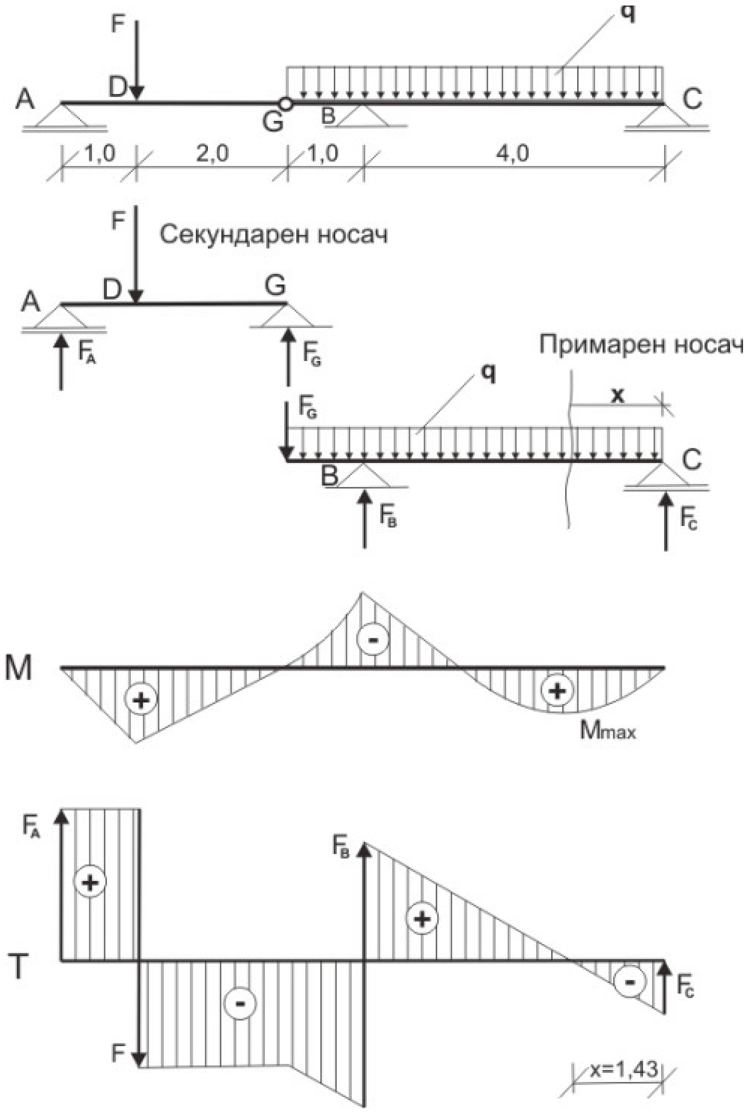
$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_A = 10{,}67\ kN$$
$$T_D^l = T_A^d = 10{,}67\,kN$$
$$T_D^d = T_D^l - F = 10{,}67 - 16 = -5{,}33\,kN$$
$$T_G = -5{,}33\,kN$$
$$T_B^l = T_G - F_{q1} = -5{,}33 - 3 = -8{,}33\,kN$$
$$T_B^d = T_B^l + F_B = -8{,}33 + 16{,}04 = 7{,}71\,kN$$
$$T_C^l = T_B^d - F_{q2} = 7{,}71 - 12 = -4{,}29\,kN$$
$$T_C^d = T_C^l + F_C = -4{,}29 + 4{,}29 = 0$$

Опасен пресек:

$$T_X = F_C - x \cdot q = 0$$
$$x = \frac{4{,}29}{3} = 1{,}43\,m$$
$$M_{\max} = M_X = F_C \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 4{,}29 \cdot 1{,}43 - 3 \cdot 1{,}43 \cdot \frac{1{,}43}{2}$$
$$M_{\max} = 3{,}067\,kNm$$

4. Определување аксијални сили

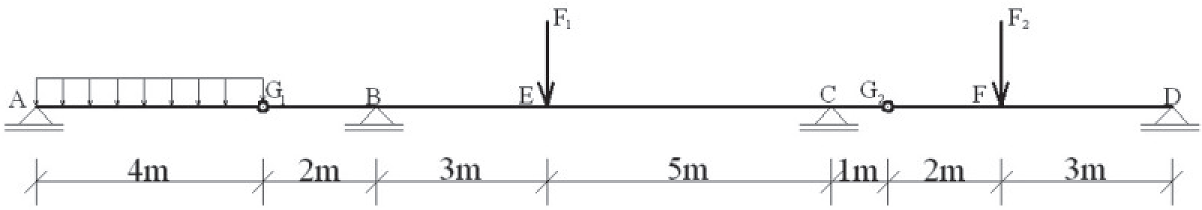
$$N_{A-C} = 0$$



Сл.132

Пример бр.49: аналитички да се определат статичките големини за даденото оптоварување кај герберовата греда (сл. 133)

$F_1 = 8\ kN$; $F_2 = 4\,kN$; $q = 2\,kN/m$



Сл.133

Решение:

Аналитички:

$$F_{q1} = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8\,kN$$

1. Определување реакции (сл.134):

греда: $A - G_1$:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{q1} \cdot 2 - F_{G1} \cdot 4 = 0$$

$$F_{G1} = \frac{8 \cdot 2}{4} = 4\,kN$$

$$\sum M_{G1} = 0$$

$$F_A \cdot 4 - F_{q1} \cdot 2 = 0$$

$$F_A = \frac{8 \cdot 2}{4} = 4\,kN$$

греда: $G_2 - D$

$$\sum M_{G2} = 0$$

$$F_2 \cdot 2 - F_D \cdot 5 = 0$$

$$F_C = \frac{4 \cdot 2}{5} = 1{,}6\,kN$$

$$\sum M_D = 0$$

$$F_{G2} \cdot 5 - F_2 \cdot 3 = 0$$

$$F_{G2} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2{,}4\,kN$$

греда: $G_1 - G_2$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_{G1} \cdot 2 + F_1 \cdot 3 - F_C \cdot 8 + F_{G2} \cdot 9 = 0$$

$$F_C = \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 2{,}4 \cdot 9}{8} = 4{,}7\,kN$$

$$\sum M_C = 0$$

$$-F_{G1} \cdot 10 + F_B \cdot 8 - F_1 \cdot 5 + F_{G2} \cdot 1 = 0$$

$$F_B = \frac{4 \cdot 10 + 8 \cdot 5 - 2{,}4 \cdot 1}{8} = 9{,}7\,kN$$

контрола:

$$\sum Y = 0$$

греда: $A - D$

$$F_A - F_{q1} + F_B - F_1 + F_C - F_2 + F_D = 0$$

$$4 - 8 + 9{,}7 - 8 + 4{,}7 - 4 + 1{,}6 = 0$$

$$20 - 20 = 0; \quad 0 = 0$$

2. Определување нападни моменти

$$M_A = 0$$

$$M_B = -F_{G1} \cdot 2 = -4 \cdot 2 = -8\,kNm$$

$$M_E = -F_{G1} \cdot 5 + F_B \cdot 3 = -4 \cdot 5 + 9{,}7 \cdot 3 = 9{,}1\,kNm$$

$$M_C = -F_{G2} \cdot 1 = -2{,}4 \cdot 1 = -2{,}4\,kNm$$

$$M_F = F_D \cdot 3 = 1{,}6 \cdot 3 = 4{,}8\,kNm$$

3. Определување трансверзални сили

$$T_A^l = 0$$

$$T_A^d = F_A = 4\ kN$$

$$T_{G1} = F_A - F_{q1} = 4 - 8 = -4\,kN$$

$$T_B^l = T_{G1} = -4\,kN$$

$$T_B^d = T_B^l + F_B = -4 + 9{,}7 = 5{,}7\,kN$$

$$T_E^l = T_B^d = 5{,}7\,kN$$

$$T_E^d = T_E^l - F_1 = 5{,}7 - 8 = -2{,}3\,kN$$

$$T_C^l = T_E^d = -2{,}3\,kN$$

$$T_C^d = T_C^l + F_C = -2{,}3 + 4{,}7 = 2{,}4\,kN$$

$$T_F^l = T_C^d = 2{,}4\,kN$$

$$T_F^d = T_F^l - F_2 = 2{,}4 - 4 = -1{,}6\,kN$$

$$T_D^l = T_F^d = -1{,}6\,kN$$

$$T_D^d = T_D^l - F_D = -1{,}6 + 1{,}6 = 0$$

Опасен пресек:

$$T_X = F_A - x \cdot q = 0$$

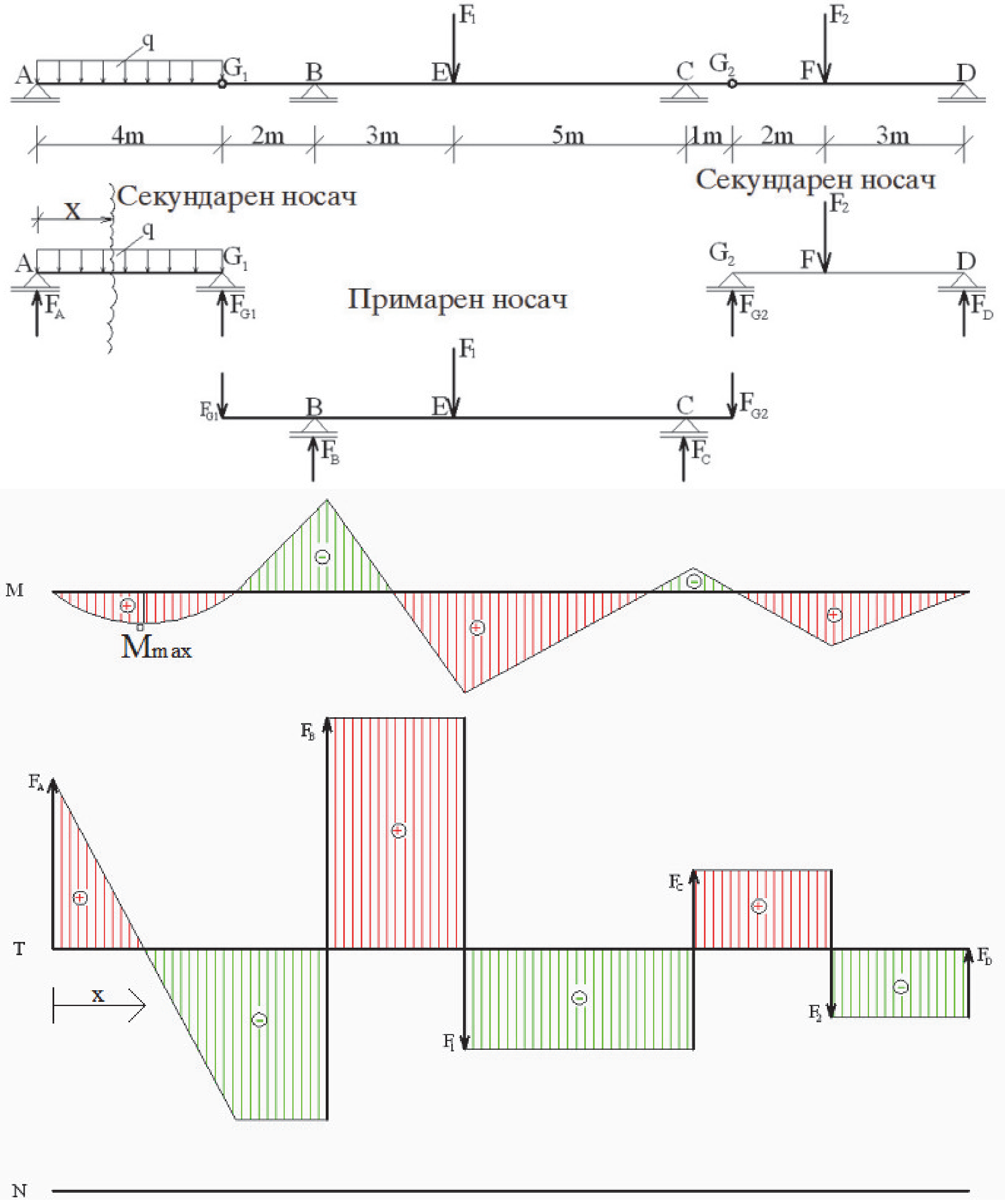
$$x = \frac{4}{2} = 2{,}0\,m$$

$$M_{\max} = M_X = F_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 8 - 4$$

$$M_{\max} = 4{,}0\,kNm$$

4. Определување аксијални сили

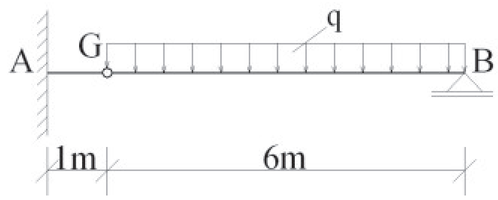
$N_{A-D} = 0$


F1
F2
q
A
G1
B
E
C
G2
F
D
4m
2m
3m
5m
1m
2m
3m
Секундарен носач
Секундарен носач
x
Примарен носач
FA
FG1
FG2
FD
FB
FC
M
Mmax
T
N

Сл.134

Пример бр.50: аналитички да се определат статичките големини за даденото оптоварување кај герберовата греда (слика 135)

$q = 3kN/m$



Сл.135

Решение:

Аналитички:

$$F_q = q \cdot 6 = 3 \cdot 6 = 18kN$$

1. Определување реакции

греда: $G-B$:

$$\sum M_G^d = 0$$

$$F_q \cdot 3 - F_B \cdot 6 = 0$$

$$F_B = \frac{18 \cdot 3}{6} = 9kN$$

греда: $A-G$:

$$\sum Y = 0$$

$$F_A - F_q + F_B = 0$$

$$F_A = 18 - 9 = 9kN$$

контрола:

$$\sum Y = 0$$

$$F_A - F_q + F_B = 0$$

$$9 - 18 + 9 = 0$$

$$18 - 18 = 0; \quad 0 = 0$$

2. Определување нападни моменти

$$M_A = -F_q \cdot 4 + F_B \cdot 7 = -18 \cdot 4 + 9 \cdot 7 = -9\ kNm$$

$$M_G = 0$$

$$M_B = 0$$

3. Определување трансверзални сили

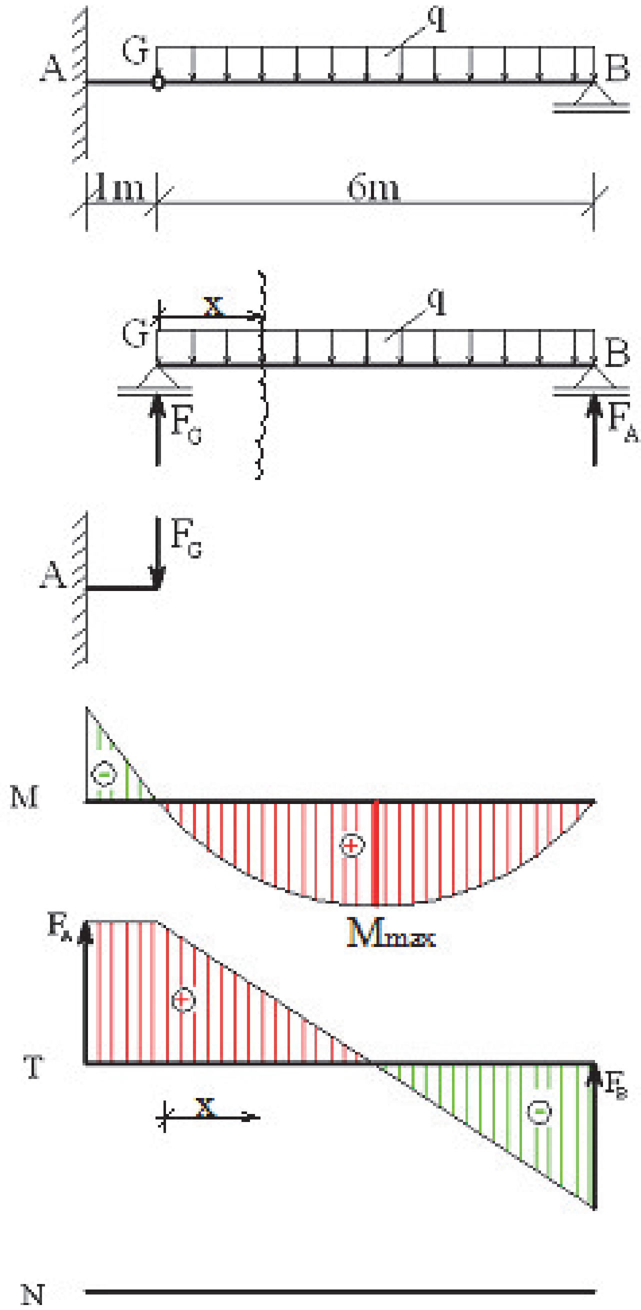
$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_A = 9\ kN$$
$$T_G = F_A = 9\,kN$$
$$T_B^l = F_A - F_q = 9 - 18 = -9\,kN$$
$$T_B^d = 0$$

Опасен пресек:

$$T_X = F_B - x \cdot q = 0$$
$$x = \frac{9}{3} = 3{,}0\,m$$
$$M_{\max} = M_X = F_B \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 9 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 18 - 13{,}5$$
$$M_{\max} = 13{,}5\,kNm$$

4. Определување аксијални сили

$$N_{A-D} = 0$$



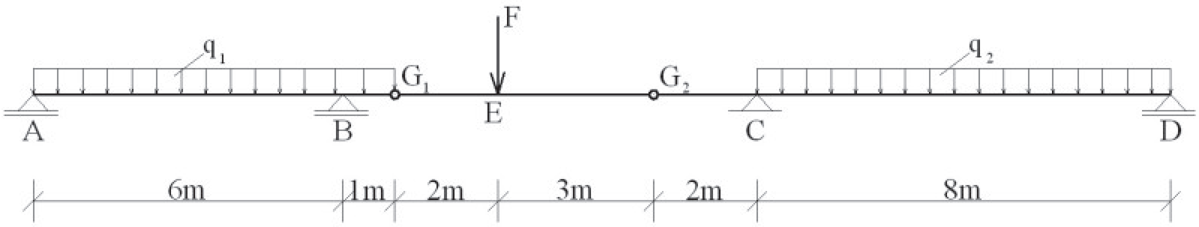
Сл.136

Запомни:

Герберова греда е сложен определен греден систем составен од повеќе прости греди, греди со препусти и конзоли.

Задачи за вежбање:

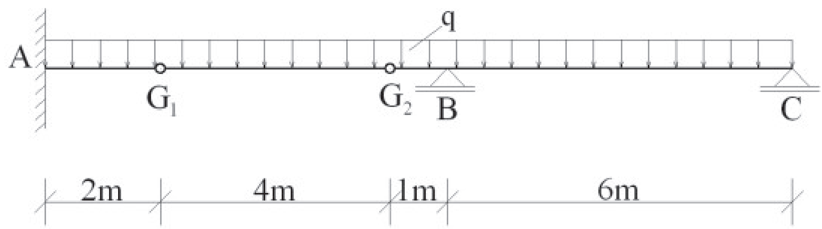
Задача бр.1



Сл.137

$F = 10\,kN$; $q_1 = 3\,kN/m$; $q_2 = 4\,kN/m$

Задача бр.2

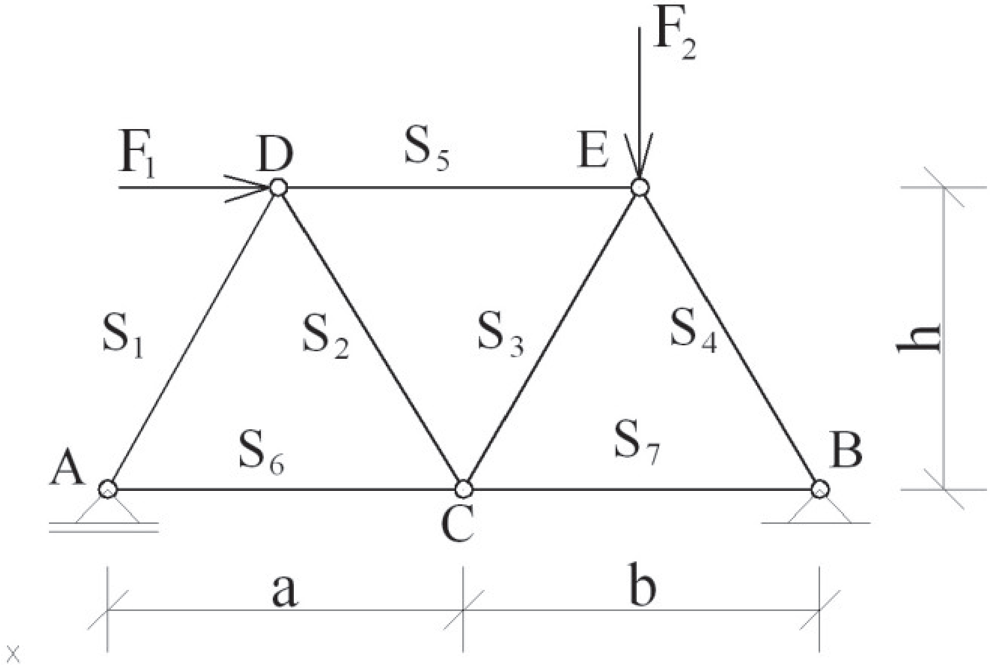


Сл.138

$q = 3\,kN/m$

7. РАМНИ РЕШЕТКАСТИ НОСАЧИ

Покрај полните рамни носачи, со кои се запознавме, постојат и решеткасти носачи или само решетки (сл. 139). Тука ќе ги запознаеме само рамните решеткасти носачи, а освен нив постојат и просторни решеткасти носачи.



Сл.139

Рамните решеткасти носачи се составени од неподвижни стапови меѓусебе поврзани со идеални зглобови (без триење) во тријаголници. Овие зглобови се нарекуваат **јазли**.

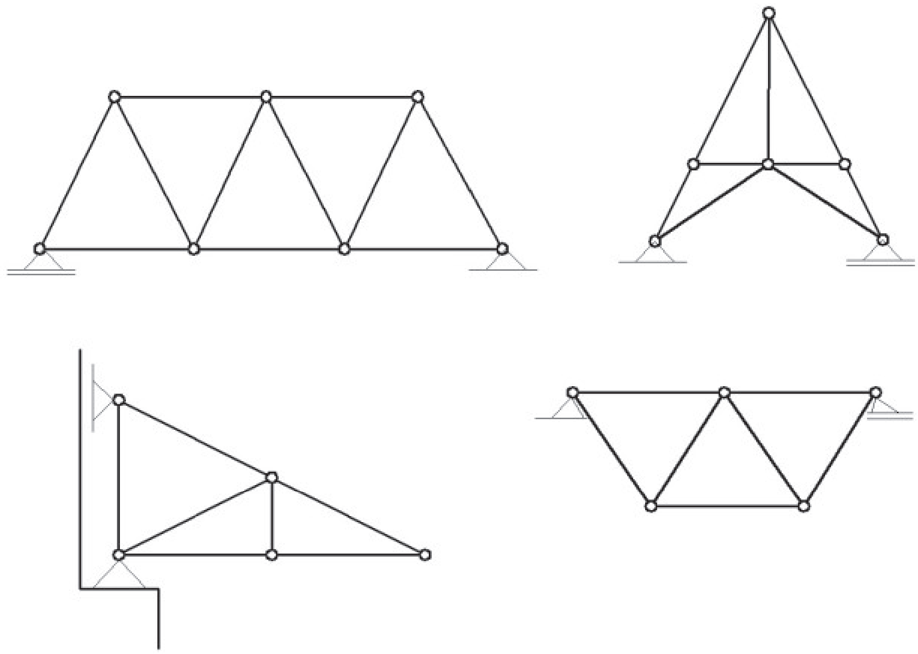
Кога во еден зглоб има само два стапа, тоа е прост јазол (јазлите A и B на сл. 158). Јазлите со три или повеќе стапа се сложени јазли, (јазлите C, D и E на сл. 158). Страповите кои ја ограничуваат целата решетка се нарекуваат појасни стапови (S_1 S_5 S_4 S_6 и S_7; сл.158). Внатрешните стапови се стапови на исполна (S_2 и S_3).

Товарите кај решетките може да бидат: **вертикални, коси** или **хоризонтални**, но може да дејствуваат само во јазлите и во рамнината на решетката. Тоа значи, доколку оптоварувањето дејствува помеѓу два соседни јазли во поле, треба да се разложи на овие два јазли.

Под влијание на надворешните сили во стаповите на решетките се јавуваат само аксијални сили (во пресеците на стаповите кај идеални решетки нема моменти на свиткување ниту трансверзални сили). Со пресметувањето на овие сили во стаповите ќе се запознаеме подоцна.

Решеткастите носачи имаат голема примена во градежништвото и тоа како: покривни носачи, дигалки, кранови, мостови и друго (сл. 140).

Материјал од кој се изработуваат решеткастите носачи е: **челикот, дрвото и армираниот бетон.**



Сл.140

Во однос на статичкиот систем решетките можат да бидат: **проста греда, конзола, греда со препусти, герберова греда и други.**

7.1 СТАТИЧКА ОПРЕДЛЕНОСТ НА РЕШЕТКИ

Кај решеткастите носачи постои надворешна и внатрешна статичка определеност и неопределеност.

Решетката е надворешно статички определена кога реакциите можеме да ги определеме со примена на трите аналитички услови за рамнотежа:

$\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M = 0$

Во случај кога реакциите не можеме да ги определиме само со помош на трите основни равенки за рамнотежа, решетката е статички надворешно неопределена. Ние ќе се запознаеме само со статички надворешно определени решеткасти носачи.

Кај внатрешно статички определените решеткасти носачи мора да постои одреден однос меѓу бројот на стаповите и бројот на јазлите. За да биде решеткастиот носач неподвижна и непроменлива фигура, исто така мора да постои зависност меѓу бројот на стаповите (S) и бројот на јазлите (n). Од сите полигони само триаголникот е неподвижен т.е. не го менува својот облик од дејството на какви и да е товари во неговите темиња. Значи, решеткастиот носач треба да биде составен од триаголници. За првиот триаголник потребни се три стапа и три јазли, а за секој нареден уште по два стапа и по еден јазол, односно за $n-3$ јазли потребно е $2 \cdot (n-3)$ стапа. Ако кон ова додадеме три стапа за првиот триаголник, ќе добиеме:

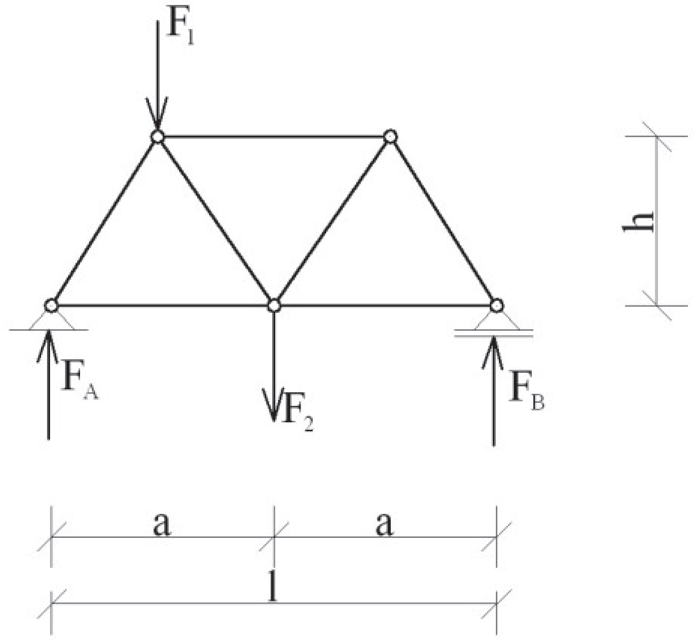
$$S = 3 + 2 \cdot (n-3) = 2n-3$$

$$S = 2n-3$$

Решетките за кои е исполнет дадениот услов меѓу бројот на стаповите"S" и бројот на јазлите "n" се внатрешно статички определени решетки. Ние ќе се запознаеме само со внатрешно статички определени решеткасти носачи.

Решетките каде што е $S > 2n-3$ се статички внатрешно неопределени.

Ако е $S < 2n-3$ решетката е внатрешно подвижна или лабилна.



Сл.141

Реакциите кај решеткастите носачи се определуваат сосема на ист начин како кај полни гредни носачи, т.е. графички и аналитички (види слика 141)

Ние ќе се задржими само на аналитичкото определување.

Аналитичкото определување на реакциите се врши со користење на условите за рамнотежа на сили во рамнина $\sum X = 0; \sum M_A = 0; \sum M_B = 0$ и контрола $\sum Y = 0$.

За решетката покажана на слика 141, условот $\sum X = 0$ е исполнет, бидејќи товарот е вертикален.

Реакцијата **B** се определува од условот:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot \frac{a}{2} + F_2 \cdot a - F_B \cdot 1 = 0; F_B = ...$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_A \cdot 1 - F_1 \cdot \frac{3a}{2} - F_2 \cdot a = 0; F_A = ...$$

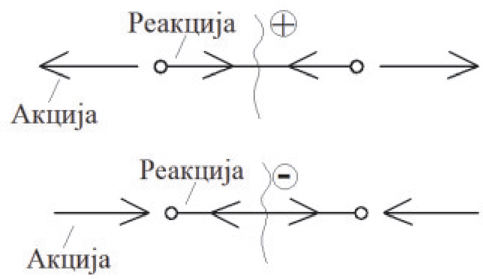
Контрола: $\sum Y = 0;\ \ F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0$

Освен реакциите, кај решеткастите носачи се определуваат и внатречните сили во стаповите. Овие сили се определуваат по графички и аналитички метод.

7.2 МЕТОДИ ЗА ОПРЕДЕЛУВАЊЕ СИЛИ ВО СТАПОВИТЕ

За определување на внатрешните сили кај стаповите на решеткастите носачи, треба да се исполнети следните претпоставки:

- оптоварувањето да дејствува во јазлите;
- стаповите да се прави;
- стаповите да се поврзани со зглобови без триење;
- надворешните сили да се во иста рамнина со решетката и
- внатрешните сили во стаповите да се на истегнување



или притисок и се претпоставува дека дејствуваат по тежишната оска на стапот.

Со исполнувањето на споменатите претпоставки од реална решетка се поминува на идеална решетка.

Силите во стаповите на решеткасти носачи може да се определат на повеќе начини.

Графички метод за определување на силите во стаповите на решеткасти носачи предложен од англискиот физичар Максвел (Maxwell, 1864), а разработен од италјанскиот инженер Кремона (Cremona, 1872), се користи во случаи кога треба да се определат сите сили во стаповите на решеткастата конструкција.

Аналитички метод за определување на силите во стаповите во одредени пресеци на решеткастите носачи е предложен од страна на германскиот инженер Ритер (Ritter, 1863).

Графички метод за определување на силите во стаповите во одредени пресеци на решеткастите носачи, е предложен од страна на инженер Кулман (Culmann, 1866) од Швајцарија.

Тука ќе се запознаеме само со методот на Кремона и методот на Ритер.

7.3 МЕТОД НА КРЕМОНА

Методот на Кремона е чисто графички метод за определување на силите во стаповите кај решетките. Овој метод ја има таа предност што со помош на еден цртеж се определуваат сите сили во стаповите на решетката.

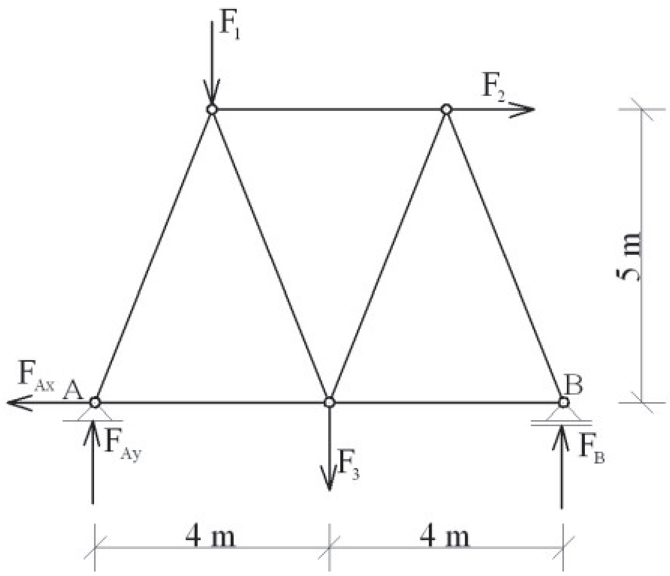
Определувањето на силите во стаповите по оваа метода се базира на следните правила:

- во случај целиот носач да е во рамнотежа од дејството на надворешните сили, мора и секој исечен јазол од носачот да биде во рамнотежа од дејството на надворешните и внатрешните сили кои дејствуваат во тој јазол;
- надворешните и внатрешните сили (силите во стаповите) кои напаѓаат во еден јазол претставуваат еден систем од сили кој напаѓа во една точка и чиј графички услов за рамнотежа е тие да образуваат затворен план на сили, во кој насоките се бркаат. Решение е можно ако имаме најмногу две непознати (непознат интезитет и насока, а познат правец). За секој јазол конструираме затворен полигон на сили.

По определувањето на реакциите конструираме план на надворешни сили (сл. 161), земајќи ги предвид и реакциите во потпорите (лежиштата), обиколувајќи ја решетката во движење во насока на стрелката на часовникот.

Се тргнува од јазолот А (каде што имаат само два стапа) и надворешната сила.
Истата постапка ја повторуваме и за јазлите С и Е, во кои има по две непознати сили. Во јазолот В всушност се прави контрола на целиот план на Кремона, кој мора да биде затворен.
Со мерење на должините на одделните сили во стаповите во кремониниот план на сили со помош на размер, ги добиваме вистинските сили во стаповите на решетката. Со тоа решетката е подготвена за димензионирање.
Преку нумерички примери овој метод ќе биде подетално прикажан.

Задача бр.51 По методот на Кремона да се определат силите во стаповите на дадената решетка (слика 142)



$F_1 = 5\,kN$;
$F_2 = 4\,kN$;
$F_3 = 6\,kN$

Сл.142

Решение:
Аналитички:

1. Определување на реакции

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 4 - F_B \cdot 8 = 0$$

$$F_B = \frac{F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 4}{8} = \frac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 4}{8} = 6{,}75\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 8 - F_1 \cdot 6 - F_3 \cdot 4 + F_2 \cdot 5 = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{F_1 \cdot 6 + F_3 \cdot 4 - F_2 \cdot 5}{8} = \frac{5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 5}{8} = 4{,}25\,kN$$

$\sum X = 0$

$$-F_{Ax} + F_2 = 0\,; \quad F_{Ax} = F_2 = 4\,kN$$

контрола:

$\sum Y = 0$

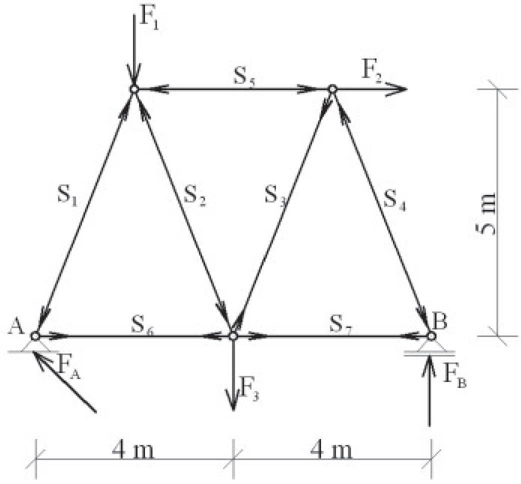
$$F_{Ay} - F_1 - F_3 + F_B = 0$$

$$4{,}25 - 5 - 6 + 6{,}75 = 0$$

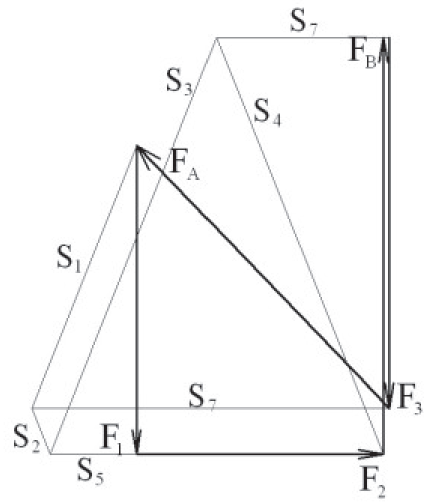
$$0 = 0$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{4^2 + 4{,}25^2} = 5{,}836\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{4{,}25}{4} = 1{,}0625 \qquad \varphi = 46^\circ$$



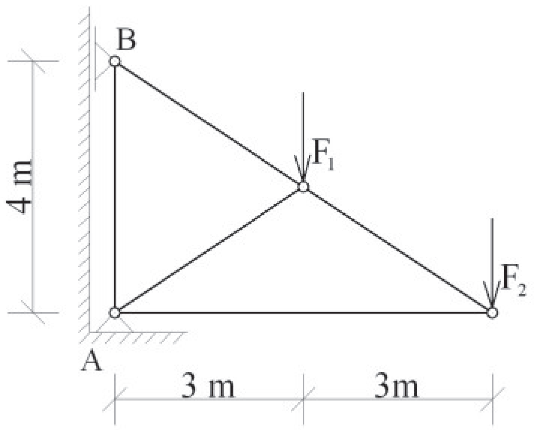
Сл.143



Стапови	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
- kN	4,6	0,8		7,3	1,4		
+ kN			7,3			5,7	2,7

Задача бр.52 По методот на Кремона да се определат силите во стаповите на дадената решетка (слика 146)

$F_1 = 6\,kN$; $F_2 = 4\,kN$;



Сл.146

Решение:
Аналитички:

1. Определување на реакции

$$\sum M_A = 0$$

$$-F_B \cdot 4 + F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6 = 0$$

$$F_B = \frac{F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6}{4} = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 6}{4} = 10{,}5\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_{AX} \cdot 4 + F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6 = 0$$

$$F_{AX} = \frac{F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6}{4} = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 6}{4} = 10{,}5\,kN$$

контрола:

$$\sum X = 0$$

$$-F_B + F_{AX} = 0$$

$$-10{,}5 + 10{,}5 = 0$$

$$0 = 0$$

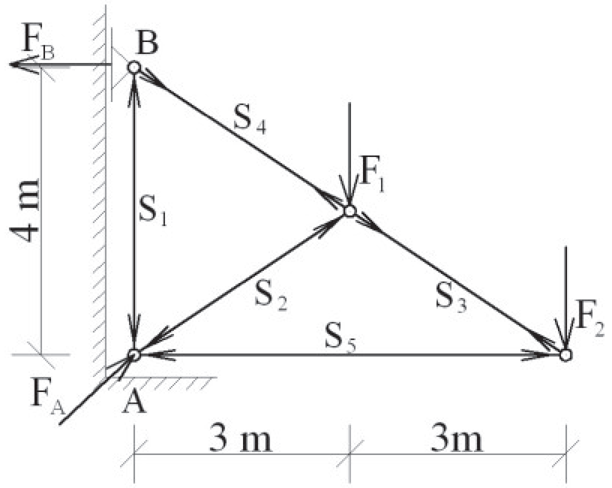
$$\sum Y = 0$$

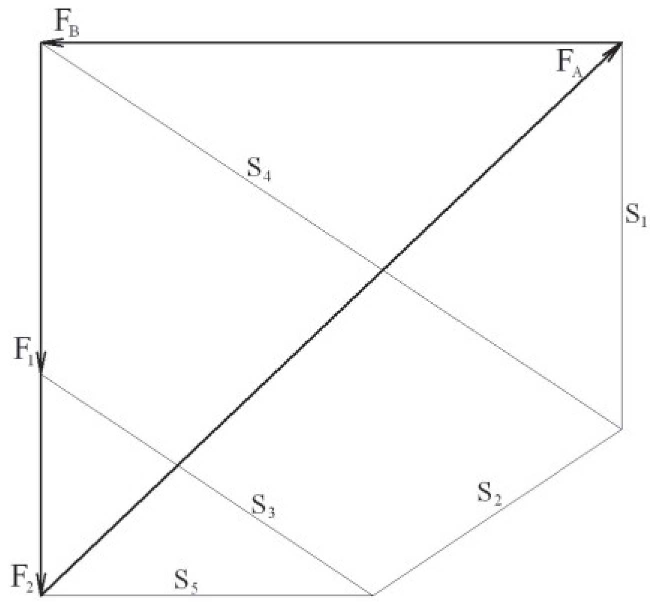
$$F_{Ay} - F_1 - F_2 = 0$$

$$F_{Ay} = F_1 + F_2 = 6 + 4 = 10\,kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{10{,}5^2 + 10^2} = \sqrt{110{,}25 + 100} = 14{,}5\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{10}{10{,}5} = 0{,}95238\,; \quad \varphi = 43^\circ$$





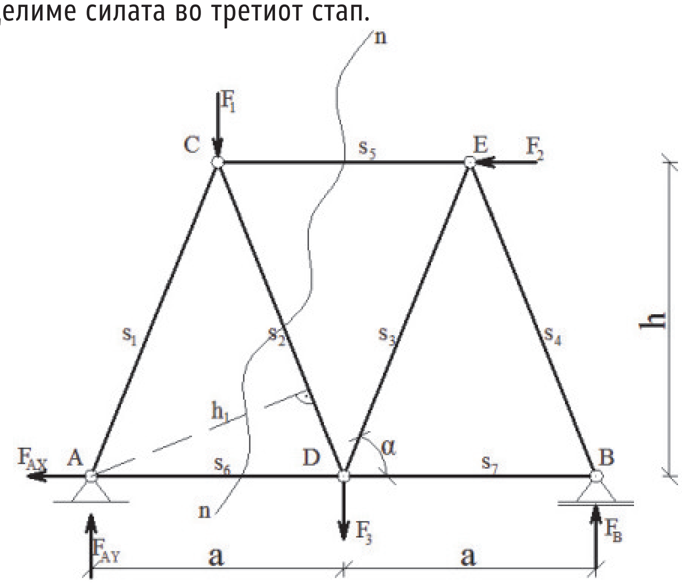
Сл.147

стапови		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
сила kN	притисок-	7,0	5,4			6,0
	затегање+			7,2	12,6	

7.4 МЕТОД НА РИТЕР

Методот на Ритер е аналитички метод за определување на силите во стаповите кај решетки. Суштината е во претпоставката за рамнотежа на решеткастиот носач од дејството на надворешните сили (тука се подразбираат и реакциите), тогаш во било кој замислен пресек мора да постои рамнотежа меѓу надворешните сили лево (или десно) од тој пресек, со внатрешните сили во стаповите кои се пресечени. Со други зборови, мора да бидат исполнети основните услови за рамнотежа за замислено отсечениот дел односно:
ΣX=0; ΣY=0; ΣM=0;

Решеткастиот носач замислено го пресекуваме најмногу во три стапа чии сили треба да ги определиме (сл. 148), но под услов да не се сечат во ист јазол. Левиот (или десниот) дел од пресекот на решетката замислено го отстрануваме и неговото влијание го заменуваме со непознати внатрешни сили, кои сега ги сметаме како надворешни сили. Од познатите аналитички услови за рамнотежа ги определуваме овие три непознати сили во стаповите на решетката. Вообичаено се користи условот ΣM=0, а како моментна точка се користи пресекот на двата стапа чии сили треба да се определат (точките C или D). Со тоа тие сили ги елеминираме, па може да ја определиме силата во третиот стап.



Сл.148

Ако резултатот за бараната сила биде позитивен, тоа значи дека насоката која е претпоставена е точна. Во случај тој резултат да е негативен, насоката е обратна од претпоставената.

Ќе го примениме Ритеровиот метод за носачот на слика 149. Претпоставуваме дека носачот е пресечен со пресекот $N-N$, односно ќе ги определиме силите S_5, S_2 и S_6

$$\sum M_c = 0$$

$$F_{ay} \cdot a - F_1 \cdot 0{,}5a - S_5 \cdot h = 0$$

$$S_5 = \frac{F_{Ay} \cdot a - F_1 \cdot 0,5 \cdot a}{h}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 0,5 \cdot a - S_6 \cdot h - F_{Ax} \cdot h = 0$$

$$S_6 = \frac{F_{Ay} \cdot 0,5 \cdot a - F_{Ax} \cdot h}{h}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 0,5 \cdot a - S_5 \cdot h + S_2 \cdot h_1 = 0$$

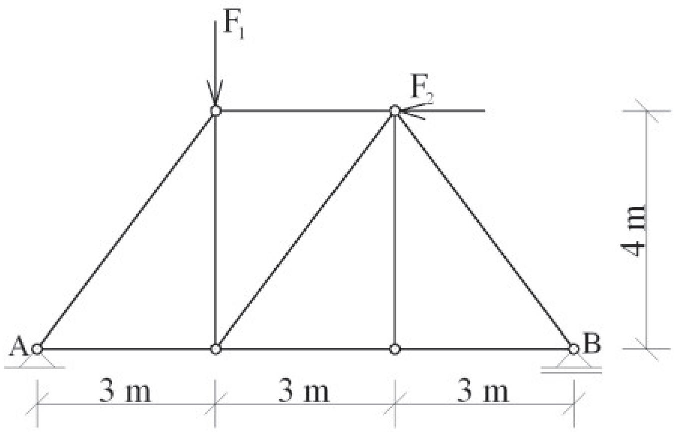
$$S_2 = \frac{-F_1 \cdot 0,5 \cdot a + S_5 \cdot h}{h_1}$$

Забелешка:

$$tg\alpha = \frac{h}{0,5 \cdot a}; \quad \sin\alpha = \frac{h_1}{a}, \qquad h_1 = a \cdot \sin\alpha$$

Задача бр.53 По методот на Ритер да се определат силите во стаповите на дадената решетка (слика 149)

$$F_1 = 6\,kN; \qquad F_2 = 8\,kN$$



Сл.149

Решение:

Аналитички (сл.150):

$$S = 2 \cdot n - 3$$

$$9 = 2 \cdot 6 - 3 = 9$$

1. Определување на реакции

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 9 = 0$$

$$F_B = \frac{F_2 \cdot 4 - F_1 \cdot 3}{9} = \frac{6 \cdot 3 - 8 \cdot 4}{9} = -1{,}555\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 9 - F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 4 = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{F_1 \cdot 6 + F_2 \cdot 4}{9} = \frac{6 \cdot 6 + 8 \cdot 4}{9} = 7{,}555\,kN$$

контрола:

$$\sum Y = 0$$

$$F_{Ay} - F_1 - F_B = 0$$

$$7{,}555 - 6 - 1{,}555 = 0$$

$$7{,}555 = 7{,}555$$

$$\sum X = 0$$

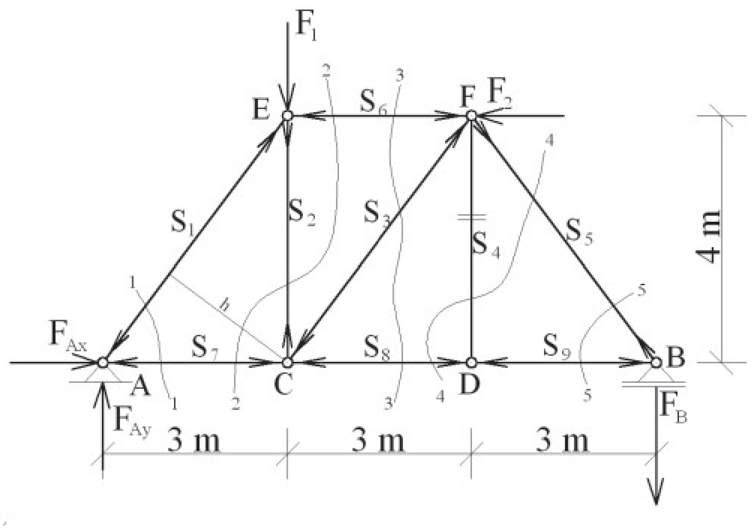
$$F_{Ax} - F_2 = 0$$

$$F_{Ax} = F_2 = 8{,}0\,kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{8^2 + 7{,}555^2} = 11{,}004\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{7{,}555}{8{,}0} = 0{,}944\,; \qquad \varphi = 43^\circ$$

За да ги определиме силите во стаповите на дадената решетка, фиктивно ги пресекуваме стаповите S_1 и S_7 (пресек $I-I$) и набљудуваме рамнотежа на левиот дел од пресекот на решетката.



Сл.150

$$\sum M_C = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 3 - S_1 \cdot h = 0$$

$$S_1 = \frac{F_{Ay} \cdot 3}{h} = \frac{7{,}555 \cdot 3}{2{,}4} = 9{,}444\,kN$$

$$\sum M_E = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 3 - F_{Ax} \cdot 4 + S_7 \cdot 4 = 0$$

$$S_7 = \frac{-F_{Ay} \cdot 3 + F_{Ax} \cdot 4}{4} = \frac{-7{,}555 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{4} = 2{,}333\,kN$$

$$tg\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}333; \qquad \alpha = 53^\circ$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{3}; \qquad h = 3 \cdot \sin\alpha = 3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4\,m$$

Понатаму, ги пресекуваме стаповите S_6, S_2 и S_7 (пресекот 2-2) и набљудуваме рамнотежа на левиот дел од пресекот на решетката:

$$\sum M_C = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 3 - S_6 \cdot 4 = 0$$

$$S_6 = \frac{F_{Ay} \cdot 3}{4} = \frac{7{,}555 \cdot 3}{4} = 5{,}666\,kN$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 3 - S_6 \cdot 4 + S_2 \cdot 3 = 0$$

$$S_2 = \frac{-F_1 \cdot 3 + S_6 \cdot 4}{3} = \frac{-6 \cdot 3 + 5{,}66 \cdot 4}{3} = 1{,}555\,kN$$

Сега ги пресекуваме стаповите S_6, S_3 и S_8 (пресекот 3 - 3) и набљудуваме рамнотежа на левиот дел од пресекот нарешетката:

$$\sum M_F = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 6 - F_{Ax} \cdot 4 - F_1 \cdot 3 - S_8 \cdot 4 = 0$$

$$S_8 = \frac{F_{Ay} \cdot 6 - F_{Ax} \cdot 4 - F_1 \cdot 3}{4} = \frac{7{,}555 \cdot 6 - 8 \cdot 4 - 6 \cdot 3}{4} = -1{,}166\,kN$$

Негативниот предзнак покажува дека претпоставената насока на силата S_8 не е точна, туку е обратна. Значи, во стапот S_8 постои сила на притисок.

$$\sum M_D = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 6 - F_1 \cdot 3 - S_6 \cdot 4 - S_3 \cdot h = 0$$

$$S_3 = \frac{F_{Ay} \cdot 6 - F_1 \cdot 3 - S_6 \cdot 4}{h} = \frac{7{,}555 \cdot 6 - 6 \cdot 3 - 5{,}666 \cdot 4}{2{,}4} = 1{,}944\,kN$$

Во овој пресек (3 - 3) ќе извршиме контрола на пресметаните вредности за S_6, S_3 и S_8 со претпоставка дека левиот дел од пресечената решетка е отстранет, па ќе ја проучуваме рамнотежата на десниот дел:

$$\sum M_C = 0$$

$$-F_2 \cdot 4 + F_B \cdot 6 + S_6 \cdot 4 = 0$$

$$S_6 = \frac{F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 6}{4} = \frac{8 \cdot 4 - 1{,}555 \cdot 6}{4} = 5{,}666\, kN$$

$$\sum M_F = 0$$

$$F_B \cdot 3 - S_6 \cdot 4 = 0$$

$$S_6 = \frac{F_B \cdot 3}{4} = \frac{1{,}555 \cdot 3}{4} = 1{,}166\, kN$$

$$\sum M_D = 0$$

$$F_B \cdot 3 - F_2 \cdot 4 + S_3 \cdot h + S_6 \cdot 4 = 0$$

$$S_3 = \frac{-F_B \cdot 3 + F_2 \cdot 4 - S_6 \cdot 4}{h} = \frac{-1{,}555 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 5{,}666 \cdot 4}{2{,}4} = 1{,}944\, kN$$

Вредностите на силите S_6, S_3 и S_8 се исти било да ја набљудуваме рамнотежата на левиот или десниот дел од пресекот 3 - 3 на решетката.

Понатаму ги пресекуваме стаповите S_5, S_4 и S_8 (пресек 4 - 4) и ја проучуваме рамнотежата на десниот дел од на пресекот на решетката:

$$\sum M_D = 0$$

$$F_B \cdot 3 - S_5 \cdot h = 0$$

$$S_5 = \frac{F_B \cdot 3}{h} = \frac{1{,}555 \cdot 3}{2{,}4} = 1{,}944\, kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$S_4 \cdot 3 = 0; \qquad S_4 = 0$$

Конечно ги пресекуваме стаповите S_8 и S_8 (пресекот 5 - 5) и ја проучуваме рамнотежата на десниот дел од пресекот на решетката:

$$\sum M_F = 0$$

$$F_B \cdot 3 - S_9 \cdot 4 = 0$$

$$S_9 = \frac{F_B \cdot 3}{4} = \frac{1{,}555 \cdot 3}{4} = 1{,}166\, kN$$

Забелешка:

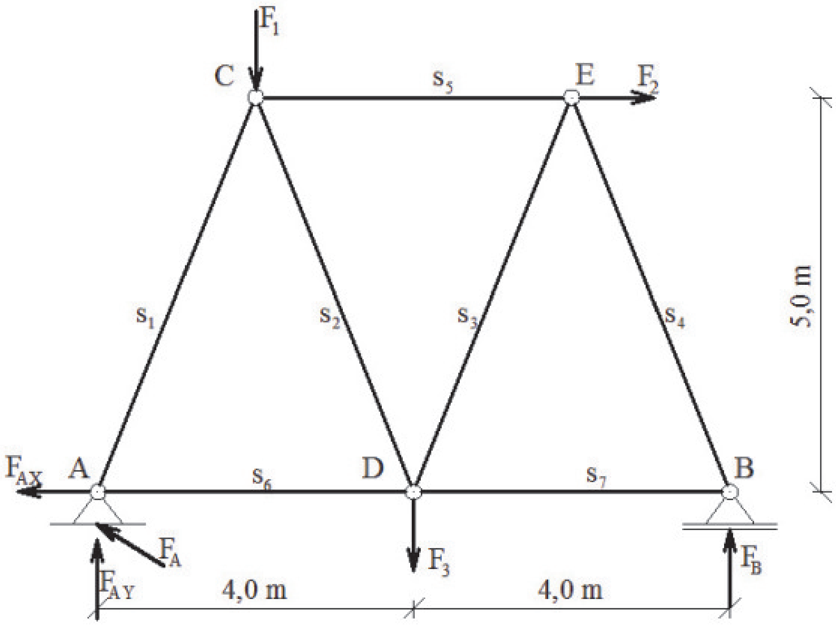
Самиот избор и редослед на пресеците при пресметка на силите во стаповите ги усвојуваме произволно, но под услов да не ги пресекуваме повеќе од три непознати сили во стаповите и истите да не се составуваат во една точка.

7.5 МЕТОД НА ЈАЗЛИ

Методот на јазли е аналитички метод за определување на силите во стаповите кај решетки.

По определувањето на реакциите се пристапува кон определување на силите во стаповите. Се тргнува од јазелот "А" каде што имаме само два стапа и надворешните сили F_{Ay} и F_{Ax}, кои се разложуваат на двете внатрешни сили S_1 и S_7, по методот на проекции. За таа цел однапрет треба да бидат определени аглите односно нивните тригонометриски функции.Оваа постапка се повторува за сите јазли со напомена дека во секој јазел можеме да имааме најмногу две непознати сили (два стапа чии внатрешни сили ги одредуваме).Ова произлегува од таму што на располагање ни се двата аналитички услови $\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0$.

Задача бр.54 По метод на јазли да се определат силите во стаповите на дадената решетка (сл.151)



Сл. 151

$F_1 = 5{,}0\,kN$; $F_2 = 4{,}0\,kN$; $F_3 = 6{,}0\,kN$

Решение:
Аналитички:

1. Определување на реакции

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 4 - F_B \cdot 8 = 0$$

$$F_B = \frac{F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 4}{8} = \frac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 4}{8} = 6{,}75\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 8 - F_1 \cdot 6 - F_3 \cdot 4 + F_2 \cdot 5 = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{F_1 \cdot 6 + F_3 \cdot 4 - F_2 \cdot 5}{8} = \frac{5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 5}{8} = 4{,}25\,kN$$

$$\sum X = 0$$

$$-F_{Ax} + F_2 = 0;\quad F_{Ax} = F_2 = 4\,kN$$

контрола:

$$\sum Y = 0$$

$$F_{Ay} - F_1 - F_3 + F_B = 0$$

$$4{,}25 - 5 - 6 + 6{,}75 = 0$$

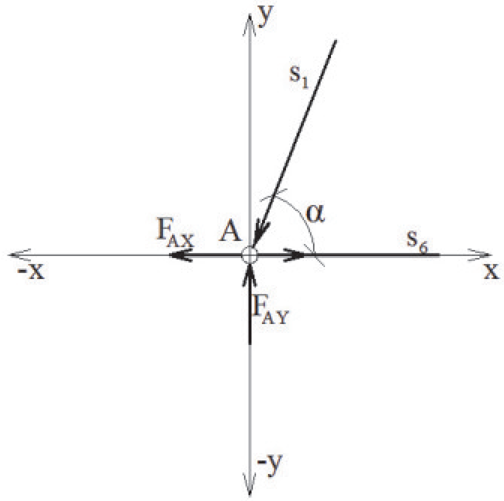
$$0 = 0$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{4^2 + 4{,}25^2} = 5{,}836\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{4{,}25}{4} = 1{,}0625 \qquad \varphi = 46^\circ$$

2. Определување сили во стапови

Јазел “А”



Сл. 152

$$tg\alpha = \frac{5}{2} = 2{,}5$$
$$\alpha = 68{,}2$$
$$\sin\alpha = 0{,}9284$$
$$\cos\alpha = 0{,}3714$$

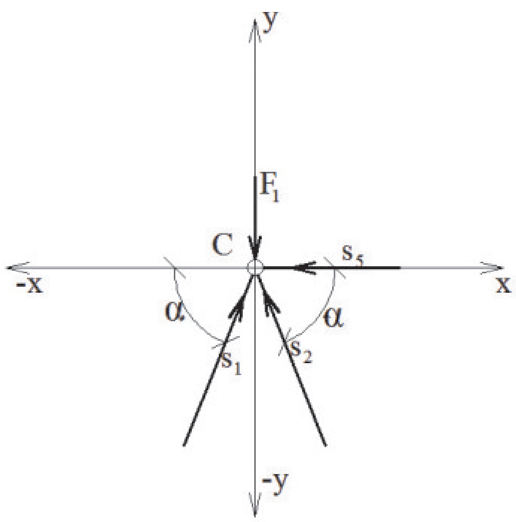
$\Sigma Y = 0$

$$F_{Ay} - S_1 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$S_1 = \frac{F_{Ay}}{\sin\alpha} = \frac{4{,}25}{0{,}9284}$$
$$S_1 = 4{,}58kN$$

$\Sigma X = 0$

$$-F_{Ax} - S_1 \cdot \cos\alpha + S_6 = 0$$
$$-4 - 4{,}58 \cdot 0{,}3714 + S_6 = 0$$
$$-4 - 1{,}70 + S_6 = 0$$
$$S_6 = 5{,}70kN$$

Јазел "C"



Сл. 153

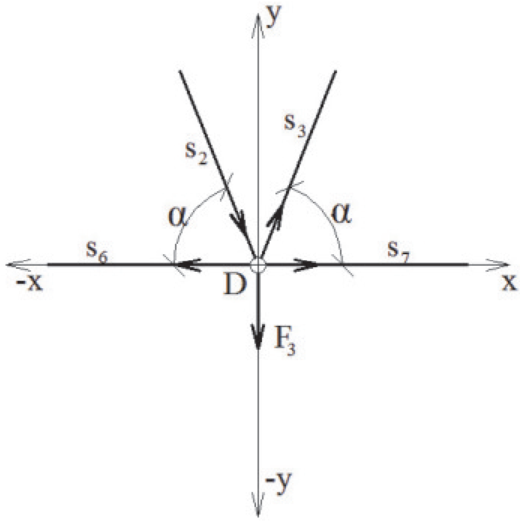
$\Sigma X = 0$

$$S_1 \cdot \cos\alpha - S_2 \cdot \cos\alpha - S_5 = 0$$
$$4{,}58 \cdot 0{,}3714 - 0{,}81 \cdot 0{,}3741 - S_5 = 0$$
$$S_5 = 1{,}40kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$S_1 \cdot \sin\alpha + S_2 \cdot \sin\alpha - F_1 = 0$$
$$4{,}58 \cdot 0{,}9284 + S_2 \cdot 0{,}9284 - 5 = 0$$
$$S_2 = \frac{0{,}75}{0{,}9284} = o{,}808kN$$

Јазел "D"



Сл. 154

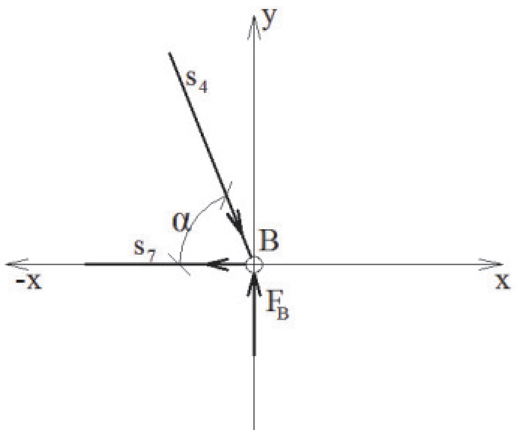
$\Sigma X = 0$

$$-S_6 + S_7 + S_2 \cdot \cos\alpha + S_3 \cdot \cos\alpha = 0$$
$$-5{,}70 + S_7 + 0{,}808 \cdot 0{,}3714 + 7{,}27 \cdot 0{,}3714 = 0$$
$$-5{,}70 + S_7 + 3{,}0 = 0$$
$$S_7 = 2{,}70 kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$-F_3 - S_2 \cdot \sin\alpha + S_3 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$-6 - 0{,}808 \cdot 0{,}9284 + S_3 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$S_3 \frac{6{,}752}{0{,}9284} = 7{,}27 kN$$

Јазел "B"



Сл. 155

$\Sigma Y = 0$

$$F_B - S_4 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$6{,}75 - S_4 \cdot 0{,}9284 = 0$$

$$-S_4 = \frac{-6{,}75}{0{,}9284} \cdot / -1$$

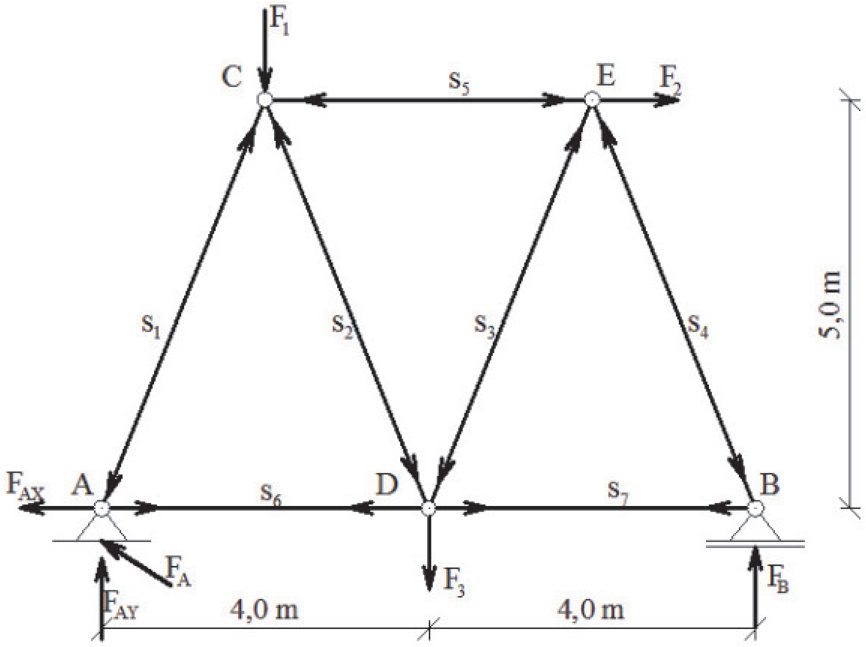
$$S_4 = 7{,}27kN$$

$\Sigma X = 0$

$$-S_7 + S_4 \cdot \cos\alpha = 0$$

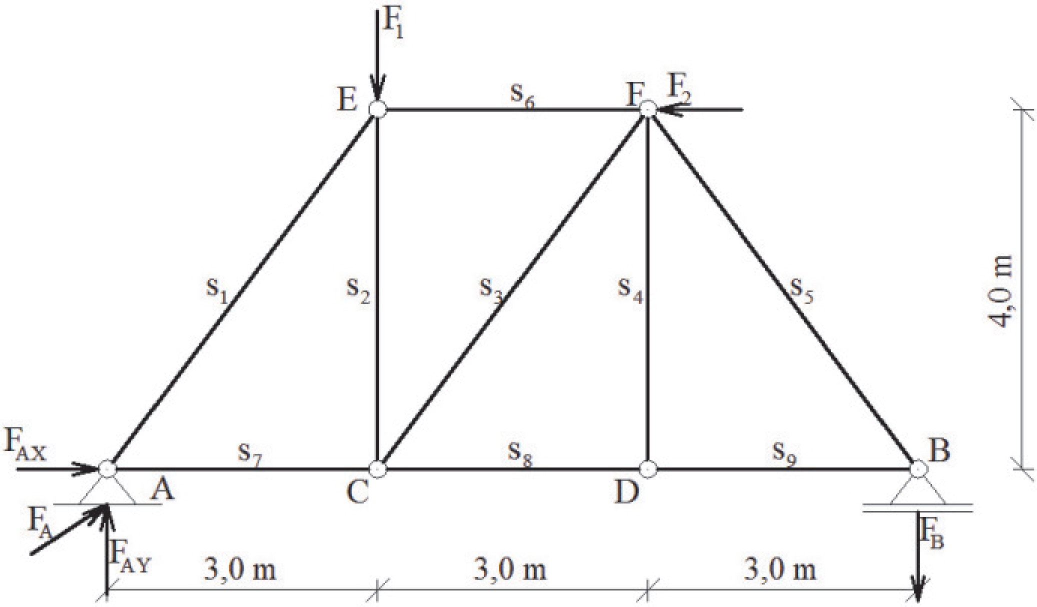
$$S_4 = \frac{S_7}{\cos\alpha} = \frac{2{,}70}{0{,}3714}$$

$$S_4 = 7{,}27kN$$



Сл. 156

Задача бр.55 По метод на јазли да се определат силите во стаповите на дадената решетка (сл.157)



Сл. 157

$F_1 = 6{,}0\,kN\,;\,F_2 = 8{,}0\,kN$

1. Определување на реакции

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 9 = 0$$

$$F_B = \frac{F_2 \cdot 4 - F_1 \cdot 3}{9} = \frac{6 \cdot 3 - 8 \cdot 4}{9} = -1{,}555\, kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 9 - F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 4 = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{F_1 \cdot 6 + F_2 \cdot 4}{9} = \frac{6 \cdot 6 + 8 \cdot 4}{9} = 7{,}555\, kN$$

контрола:

$$\sum Y = 0$$

$$F_{Ay} - F_1 - F_B = 0$$

$$7{,}555 - 6 - 1{,}555 = 0$$

$$7{,}555 = 7{,}555$$

$$\sum X = 0$$

$$F_{Ax} - F_2 = 0$$

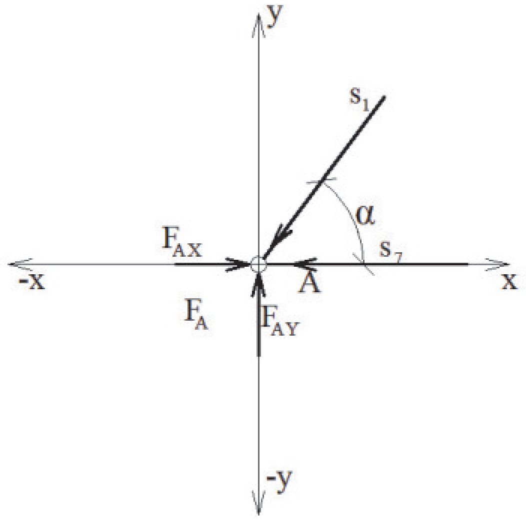
$$F_{Ax} = F_2 = 8{,}0\, kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{8^2 + 7{,}555^2} = 11{,}004\, kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{7{,}555}{8{,}0} = 0{,}944\,; \qquad \varphi = 43^\circ$$

2. Определување сили во стапови

Јазел "A"



$$tg\alpha = \frac{4}{3} = 0{,}333$$

$$\alpha = 53{,}13$$

$$\sin\alpha = 0{,}8$$

$$\cos\alpha = 0{,}6$$

Сл. 158

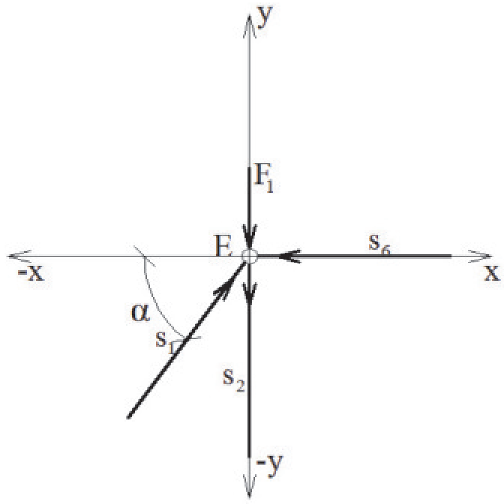
$\Sigma X = 0$

$$F_{Ax} - S_1 \cdot \cos\alpha - S_7 = 0$$
$$8 - S_1 \cdot 0{,}6 - S_7 = 0$$
$$8 - 9{,}45 \cdot 0{,}6 - S_7 = 0$$
$$8 - 5{,}67 - S_7 = 0$$
$$S_7 = 2{,}33kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$F_{Ay} - S_1 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$7{,}56 - S_1 \cdot 0{,}8 = 0$$
$$S_1 = \frac{7{,}56}{0{,}8} = 9{,}45kN$$

Јазел "Е"



Сл. 159

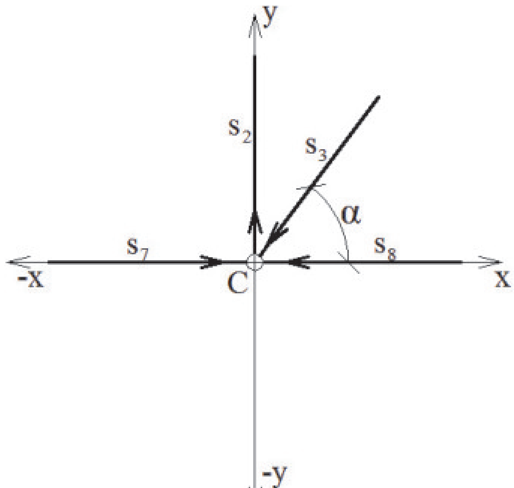
$\Sigma X = 0$

$$S_1 \cdot \cos\alpha - S_6 = 0$$
$$9{,}45 \cdot 0{,}6 - S_6 = 0$$
$$-S_6 = -5{,}67kN \cdot / -1$$
$$S_6 = 5{,}67kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$-F_1 - S_2 + S_1 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$-6 - S_2 + 9{,}45 \cdot 0{,}8 = 0$$
$$-6 - S_2 + 7{,}56 = 0$$
$$S_2 = 1{,}56kN$$

Јазел "С"



Сл. 160

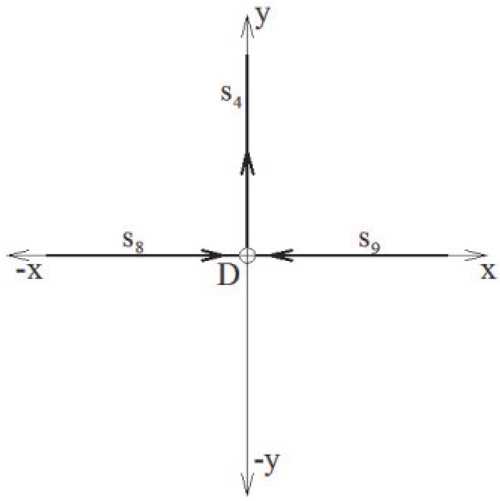
$\Sigma X = 0$

$$S_7 - S_8 - S_3 \cdot \cos\alpha = 0$$
$$2{,}33 - S_8 - 1{,}95 \cdot 0{,}6 = 0$$
$$2{,}33 - S_8 - 1{,}17 = 0$$
$$S_8 = 1{,}16kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$S_2 - S_3 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$1{,}56 - S_3 \cdot 0{,}8 = 0$$
$$-S_3 = -\frac{1{,}56}{0{,}8} \cdot / -1$$
$$S_3 = 1{,}95kN$$

Јазел "D"



Сл. 161

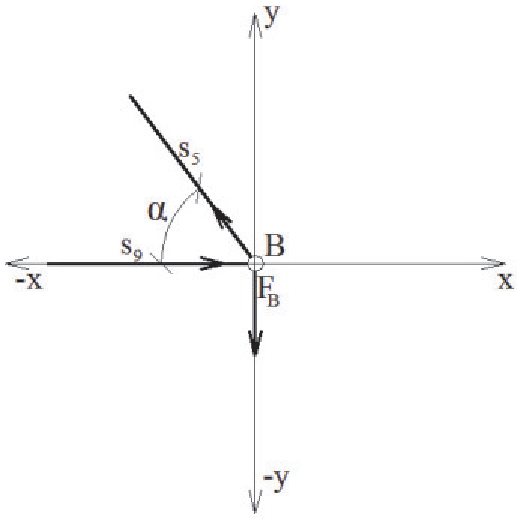
$\Sigma X = 0$

$$S_8 - S_9 = 0$$
$$S_9 = S_8 = 1{,}16kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$S_4 = 0$$

Јазел "B"



Сл. 162

$\Sigma X = 0$

$$S_9 - S_5 \cdot \cos\alpha = 0$$
$$1{,}16 - S_5 \cdot \cos\alpha = 0$$
$$S_5 = 1{,}93 kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$-F_B + S_5 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$-1{,}56 + S_5 \cdot 0{,}8 = 0$$
$$S_5 = \frac{1{,}56}{0{,}8}$$

Запомни:

Решеткастите носачи се составени од неподвиожни стапови помеѓу себе поврзани со зглобови (без триење) во триаголници.

Најчесто се применуваат за кровни конструкции, мостови и дигалки (кранови), а можат да бидат изработени од дрво, челик и армиран бетон.

Товарот кај решетките може да биде вертикален, хоризонтален и кос.

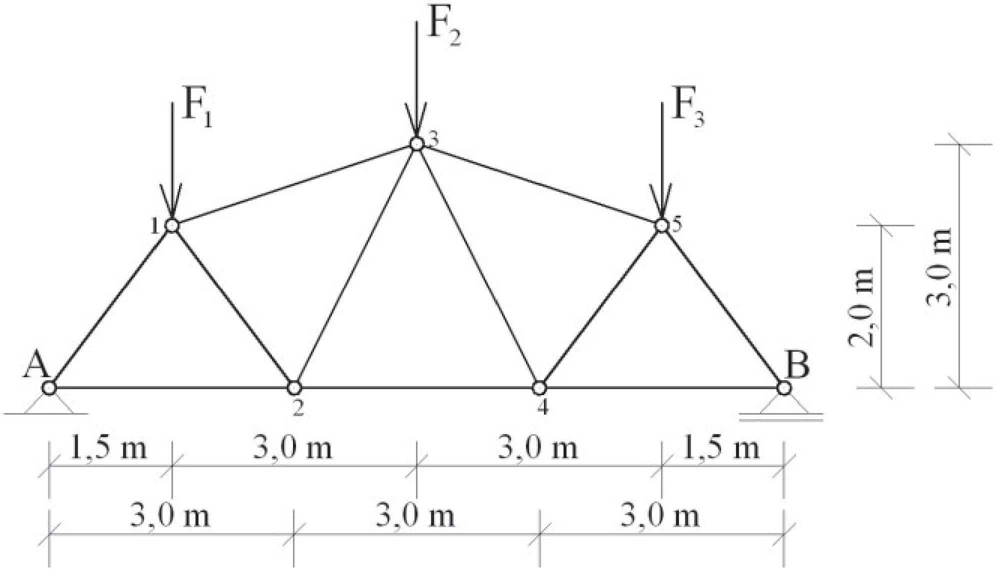
За определување на силите во стаповите ќе ги користиме методот на Кремона (графичка метода), методот на Ритер и метод на јазли (аналитички методи).

Прашања за самооценување:

1. Кои носачи ги викаме решеткасти носачи?
2. Со каков товар можат да бидат товарени решеткастите носачи?
3. Кој јазол го викаме прост, а кој сложен?
4. Каде наоѓаат најголема примена решеткастите носачи?
5. Од кој материјал најчесто се изработуваат решеткастите носачи?
6. Наброј ги методите за одредување сили во стапови кај решеткасти носачи?

Задачи за вежбање:

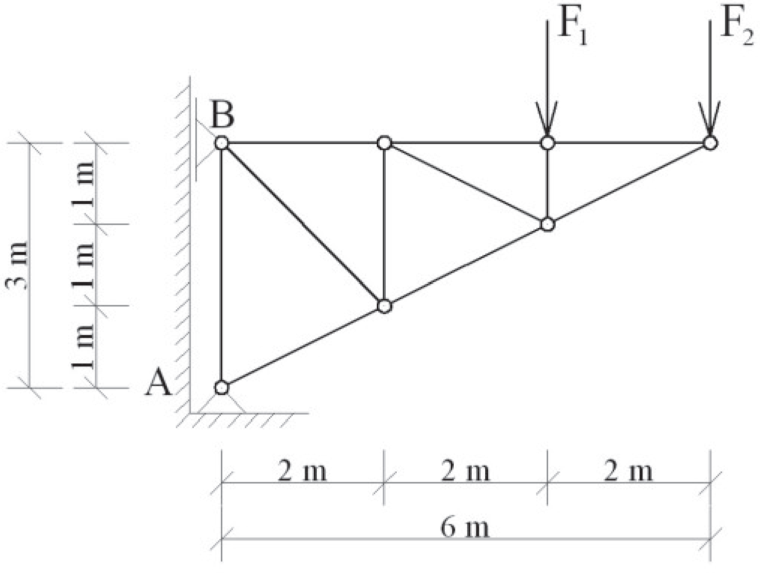
Задача бр.1 Да се определат силите во стаповите по методите на Кремона, Ритер и метод на јазли.



$F_1 = 5\ kN$
$F_2 = 10\ kN$
$F_3 = 7\ kN$

Сл. 163

Задача бр.2 Да се определат силите во стаповите по методите на Кремона, Ритер и метод на јазли.



$F_1 = 3\ kN$
$F_2 = 6\ kN$

Сл.164

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашковиќ, Механика 1. – статика 9 издање, Београд 1971 год.
2. Др. инг. Јордан Миладинов, Техничка механика 1, второ издание, Скопје 1968 год.
3. Дипл. инж. Тиберије Киријас, Техничка механика, статика, Скопје 1972 год.
4. Дипл. град. Инж. Бела Дулиќ, Техничка механика – статика, Просветно Дело Скопје 1988 год.
5. Дипл. град. Инж. Мице Мицоски, Збирка решени задачи по Техничка механика, Трамонтана 1999 год.